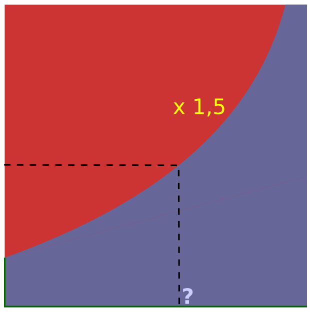
6.5 Exponentiële vergelijkingen

Inleiding

Vaak kun je door aflezen van de grafiek de tijd schatten die hoort bij een bepaalde waarde. Maar soms wil je nauwkeuriger antwoorden. Bij het oplossen van een exponentiële vergelijking kun je gebruik maken van de inklemmethode.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- vergelijkingen met exponentiële verbanden oplossen met behulp van inklemmen.

Voorkennis

- een vergelijking oplossen met behulp van de inklemmethode;
- herkennen wanneer er sprake is van lineaire groei en wanneer er sprake is van exponentiële groei;
- bij exponentiële groei/verval de groeifactor en het groeipercentage per tijdseenheid afleiden uit de gegevens;
- formules en grafieken opstellen bij exponentiële groei/verval en daarmee rekenen.

Verkennen

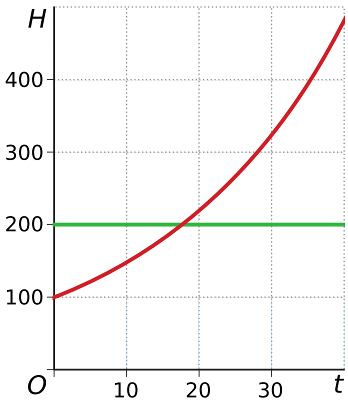
Opgave V1

Hier zie je de grafiek van $H = 100 \cdot 1{,}04^t$.
Je wilt oplossen $H = 200$.

a Welke vergelijking hoort daar bij?

b Hoe los je zo'n vergelijking op als je de gevraagde t-waarde wilt schatten?

c Hoe los je zo'n vergelijking op als je de gevraagde t in één decimaal nauwkeurig wilt weten?



Figuur 2

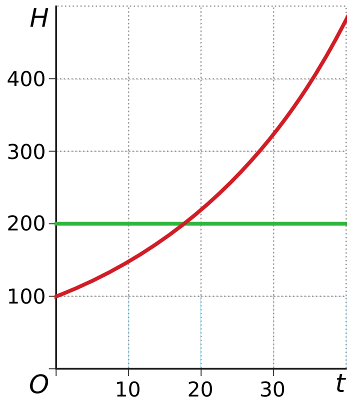
Uitleg

In de figuur zie je de grafiek van $H = 100 \cdot 1{,}04^t$.

Vaak kun je door aflezen van de grafiek de tijd schatten die hoort bij een bepaalde waarde. Maar soms wil je nauwkeuriger antwoorden. Bij het oplossen van een exponentiële vergelijking kun je gebruik maken van de inklemmethode.

Als je wilt weten wanneer de beginhoeveelheid 100 is verdubbeld, dan moet je de vergelijking: $100 \cdot 1{,}04^t = 200$ oplossen. In de figuur zie je dat de oplossing in de buurt van $t = 20$ ligt.

Vervolgens maak je een inklemtabel.



Figuur 3

t	$H = 100 \cdot 1{,}04^t$	verschil met 200
15	180,1	19,1
16	187,3	12,7
17	194,8	5,2
18	202,6	-2,6

Tabel 1

Bij $t = 18$ zit het verschil het dichtst bij 0. De oplossing van de vergelijking is: $t \approx 18$.

Soms is dit nog niet nauwkeurig genoeg. Dan maak je in de buurt van $t = 18$ een nauwkeuriger tabel.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Bij $t \approx 18$ is de beginhoeveelheid van 100 verdubbeld.

a Voor welke waarde van t is de hoeveelheid opnieuw verdubbeld? Lees je antwoord af uit de grafiek.

b Bereken met behulp van inklemmen wanneer $H = 400$. Geef de waarde van t in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 2

In 2005 had Achilles € 1000,00 op zijn bankrekening staan. Hij kon toen kiezen uit twee mogelijkheden:

1. het volledige bedrag op een spaarrekening zetten tegen 4% rente per jaar;
2. € 800,00 voor ten minste tien jaar vastzetten op een rekening die 6% rente per jaar oplevert.

a Stel de formules op van de groei van het kapitaal K_1 en K_2.

b Bereken van K_1 en K_2 de waarde van het kapitaal in 2015.

c Geef de vergelijking waarmee je het moment kunt berekenen waarop bij beide spaarvormen hetzelfde bedrag op de rekening staat.

d Bereken met een inklemtabel na hoeveel jaar K_1 en K_2 ongeveer hetzelfde opbrengen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **vergelijking met een exponentieel verband** los je op met behulp van inklemmen, met de inklemmethode.

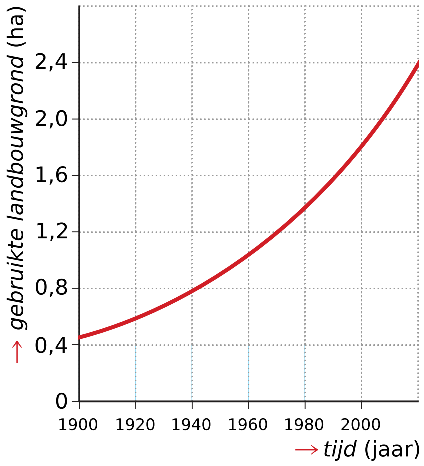
Je kunt daarmee de gevraagde waarde(n) zo nauwkeurig als je wilt benaderen.

Voorbeeld 1

In 1900 was de gebruikte landbouwgrond L in de wereld 0,45 miljard ha. Deze hoeveelheid nam jaarlijks met 1,4% toe.

Bekijk de grafiek.

Wanneer was de hoeveelheid gebruikte landbouwgrond gelijk aan 2 miljard hectare?



Figuur 4

Antwoord

De bijbehorende formule is $L = 0{,}45 \cdot 1{,}014^t$
Hierin is L de gebruikte landbouwgrond en t de tijd in jaar. en $t = 0$ in 1900.

Gevraagd wordt wanneer L gelijk is aan 2 miljard hectare landbouwgrond.

Dit geeft de vergelijking: $0{,}45 \cdot 1{,}014^t = 2$.

Eerst schat je met de grafiek dat ongeveer in 2008 de vergelijking klopt. Daarbij hoort $t = 108$.

Maak vervolgens een inklemtabel met t-waarden in de buurt van 108. Bereken het verschil steeds in vier decimalen.

t	L	$L - 2{,}00$
2005: $t = 105$	1,9373	-0,0627
2006: $t = 106$	1,9644	-0,0356
2007: $t = 107$	1,9919	-0,0081
2008: $t = 108$	2,0198	0,0198
2009: $t = 109$	2,0481	0,0481

Tabel 2

Bij $t = 107$ is het verschil het kleinst.
Dus in 2007 is de hoeveelheid gebruikte landbouwgrond ongeveer gelijk aan 2 miljard hectare.

Opgave 3

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

a Stel de vergelijking op waarmee je kunt berekenen wanneer de gebruikte hoeveelheid landbouwgrond gelijk is aan 1 miljard hectare.

b Gebruik de grafiek om een schatting te maken van het jaar waarin de 1 miljard hectare wordt bereikt.

c Bereken met een inklemtabel in welk jaar de 1 miljard hectare wordt bereikt. Rond L steeds af op vier decimalen.

Opgave 4

Een bacterie van een bepaalde soort deelt zich elke 15 minuten in tweeën. Een onderzoeker volgt het aantal bacteriën B vanaf tijdstip $t = 0$ met t in uur. Op $t = 0$ zijn er 100 bacteriën.

a Hoe groot is de groeifactor per uur?

b Stel de formule op voor het exponentiële verband B afhankelijk van t in uren.

c Hoeveel bacteriën zijn er na 2 uur?

d Hoeveel uur duurt het voor er meer dan 100 miljoen bacteriën zijn?

Opgave 5

Tijdens het begin van een griepepidemie neemt het aantal ziektegevallen dagelijks met 18% toe. Bepaal zo nauwkeurig mogelijk na hoeveel dagen het aantal zieken is verdubbeld.

Voorbeeld 2

Van 2000 tot 2050 groeit de gebruikte landbouwgrond volgens voorspellingen met 1,4% per jaar. Neem $t = 0$ in 2000. In 2000 is de gebruikte landbouwgrond 1,81 miljard hectare.

De hoeveelheid beschikbare landbouwgrond is in 2000 gelijk aan 2 miljard hectare. Voorspeld wordt dat de hoeveelheid beschikbare grond met 30 miljoen hectare per jaar kan groeien.

Schat met behulp van een grafiek en een inklemtabel het jaar waarin de benodigde hoeveelheid landbouwgrond L de beschikbare hoeveelheid B heeft ingehaald als deze voorspellingen kloppen. Rond L en B steeds af op twee decimalen.

Antwoord

Formule voor de benodigde grond vanaf het jaar 2000 ($t = 0$): $L = 1{,}81 \cdot 1{,}014^t$
Hierin is L de grootte van de beschikbare landbouwgrond en t in jaar met $t = 0$ in 2000.

Er komt jaarlijks 30 miljoen hectare bij de in 2000 aanwezige 2 miljard hectare, dat is 0,03 miljard hectare.
Formule voor de beschikbare landbouwgrond B vanaf 2000: $B = 2 + 0{,}03t$
Hierin is B de grootte van de beschikbare landbouwgrond en t in jaar met $t = 0$ in 2000.

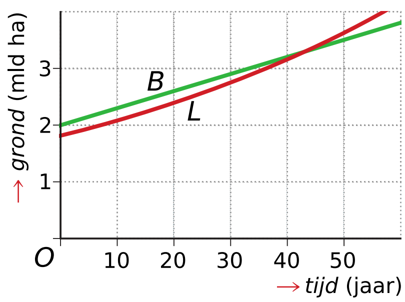
Je wilt uitrekenen op welk tijdstip de benodigde landbouwgrond gelijk is aan de beschikbare landbouwgrond:
$L = B$ geeft de vergelijking $1{,}81 \cdot 1{,}014^t = 2 + 0{,}03t$

Schat de oplossing van deze vergelijking door het snijpunt in de grafiek af te lezen: $t \approx 42$, dus in 2042.

Maak vervolgens een inklemtabel.

t	L	B	$L - B$
$t = 40$	3,16	3,20	-0,04
$t = 41$	3,20	3,23	-0,03
$t = 42$	3,25	3,26	-0,01
$t = 43$	3,29	3,29	0,00
$t = 44$	3,34	3,32	0,02

Tabel 3



Figuur 5

Bij $t = 43$ is het verschil 0,00. In 2043 is de benodigde landbouwgrond gelijk aan de beschikbare landbouwgrond.

Opgave 6

Los op: $137 \cdot 1{,}27^t = 289 + 55 \cdot t$.

a Gebruik een grafiek om de oplossing te schatten.

b Los de vergelijking op. Rond t af op één decimaal.

Verwerken

Opgave 7

Los de vergelijking $4 \cdot 1{,}2^t = 12$ op met behulp van een inklemtabel. Rond t af op één decimaal.

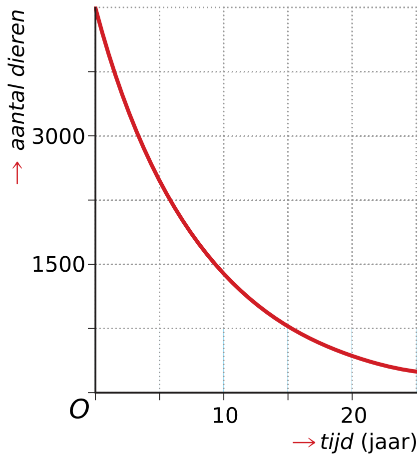
Opgave 8

Los op: $137 \cdot 1{,}27^t = 289 + 55 \cdot t$. Geef t in gehelen.

Opgave 9

Van een bedreigde diersoort in het wild is een formule gemaakt waarmee je per jaar t kunt berekenen hoeveel dieren D er nog zijn. $D = 4450 \cdot 0{,}89^t$ met $t = 0$ in 2007.

Hier zie je de bijbehorende grafiek.



Figuur 6

a Bepaal met de grafiek na hoeveel jaar het aantal dieren is gehalveerd.

b Na hoeveel jaar is er nog minder dan 25% van de dieren over?

Bekijk de vergelijking $4450 \cdot 0{,}89^t = 1235$.

c Op welke vraag geeft de oplossing van de vergelijking een antwoord?

d Wat is het antwoord op die vraag als je het op de maand nauwkeurig wilt weten?

e Is het zinvol om dit tot op de maand nauwkeurig te willen weten?

Opgave 10

In een gebied wordt een diersoort met uitsterven bedreigd. Jaarlijks wordt de totale hoeveelheid dieren in dat gebied 12% kleiner.

Bepaal zo nauwkeurig mogelijk na hoeveel jaar nog 10% van deze diersoort in het gebied leeft.

Opgave 11

Stine heeft een salaris van € 2000 per maand. De komende vijf jaar krijgt ze geen loonsverhoging. Maandelijks is zij nu € 1500 aan levensonderhoud kwijt. De kosten voor levensonderhoud gaan per maand met 0,4% omhoog.

a Geef de formule voor het bedrag V dat Stine per maand overhoudt na aftrek van de kosten voor levensonderhoud. Neem $t = 0$ op het moment dat levensonderhoud haar € 1500 kost.

b Teken een grafiek bij V met t van 0 tot 60 maanden.

c In welk jaar houdt Stine minder dan € 150 per maand over? Schat met de grafiek in welk jaar dat zal zijn. Bepaal daarna met een tabel in welke maand precies.

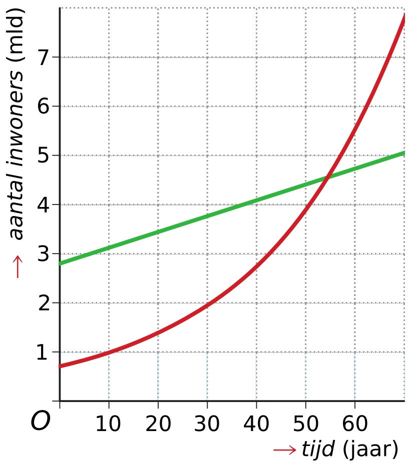
Toepassen

Opgave 12: Wel- en niet-geïndustrialiseerde landen

In 1972 was het totaal aantal inwoners van alle steden in geïndustrialiseerde landen A_i gelijk aan het totaal aantal inwoners van alle steden in niet-geïndustrialiseerde landen A_n: beide 0,7 miljard inwoners.

De steden in de geïndustrialiseerde landen groeiden daarna met 8 miljoen inwoners per jaar. In niet-geïndustrialiseerde landen groeiden de steden met 3,5% per jaar.

Bekijk de grafiek van $A_n = 0{,}7 \cdot 1{,}035^t$ en $4A_i = 4(0{,}7 + 0{,}008t)$.



Figuur 7

a Bekijk de vergelijking $0{,}7 \cdot 1{,}035^t = 4(0{,}7 + 0{,}008t)$.
Welke vraag hoort bij deze vergelijking?

b Lees de oplossing van deze vergelijking af uit de grafiek. Welk jaartal hoort bij deze oplossing?

c Bepaal met behulp inklemmen de juiste waarde van t in gehele jaren nauwkeurig en het bijbehorende jaartal.

Testen

Opgave 13

In een pil zit 500 mg werkzame stof die in de darmen terechtkomt. Daarvan wordt elke minuut ongeveer 6,7% werkzame stof in het bloed opgenomen.

a Welke formule beschrijft de hoeveelheid werkzame stof W in mg in maag en darmen t minuten na het innemen van één zo'n pil?

b Teken een grafiek bij W en bepaal met de grafiek na hoeveel tijd 450 gram van de werkzame stof B in het bloed opgenomen.

c Bepaal het antwoord bij c tot op de minuut nauwkeurig met een inklemtabel.