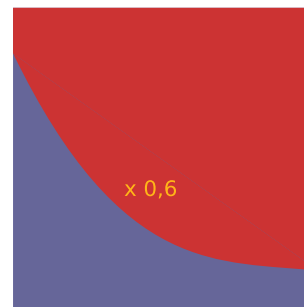


6.4 Exponentieel verval

Inleiding

Behalve exponentiële groei bestaat er ook exponentiële afname, ofwel exponentieel verval. Ook de grafieken daarbij zien er steeds ongeveer hetzelfde uit. Maar de groeifactoren bij nu kleiner dan 1, omdat de uitkomsten steeds kleiner worden. Daar ga je nu mee werken.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- formules opstellen bij exponentieel verval en daarmee rekenen;
- grafieken maken bij exponentieel verval en er conclusies uit trekken.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- herkennen wanneer er sprake is van lineaire groei en wanneer er sprake is van exponentiële groei;
- bij exponentiële groei de groeifactor en het groeipercentage per tijdseenheid afleiden uit de gegevens;
- formules en grafieken opstellen bij exponentiële groei en daarmee rekenen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de volgende tabel over het aantal dieren van een bepaalde soort in het wild.

| Jaar | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 |
|---------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Aantal dieren | 4450 | 3961 | 3525 | 3137 | 2792 | 2485 | 2212 | 1968 | 1752 |

Tabel 1

- Bereken de groeifactor per jaar. Wat valt je op?
- Hoe zou je dit kunnen verklaren?
- Met hoeveel procent neemt het aantal dieren ieder jaar af?
- Hoeveel dieren zijn er nog over in 2025 als het zo doorgaat?

Uitleg

In het stadje *H* werd jaren geleden het aantal ratten geschat op 7000. Door bestrijding moest de hoeveelheid ratten *R* iedere maand met 10% afnemen.

Dit betekende dat er aan het eind van elke maand nog $100 - 10 = 90\%$ van de ratten over zou blijven.

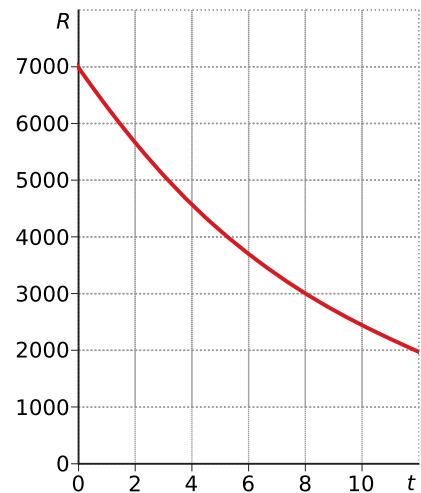
De 'groefactor' per maand is dan 0,90.

De bijbehorende formule voor het aantal ratten is:

$$R = 7000 \cdot 0,9^t \text{ met } t \text{ de tijd in maanden.}$$

Hiernaast zie je de bijbehorende grafiek. Je ziet het aantal ratten behoorlijk snel afnemen.

Als er sprake is van afname met een vast percentage spreek je van exponentieel verval. De groefactor is bij exponentieel verval een getal tussen 0 en 1 zoals je ziet.



Figuur 2

Opgave 1

Het aantal dieren *A* van een bedreigde soort bestond in 2013 nog uit 25000 exemplaren. De populatie nam met 8% per jaar af.

- Is er sprake van exponentieel verval? Licht je antwoord toe.
- Hoeveel bedraagt de groefactor *g* per jaar?
- Geef de formule voor het verloop van de populatie *A* afhankelijk van de tijd *t*.
- Vul de tabel in ($t = 0$ in 2013) en teken een bijpassende grafiek.

| | | | | | | |
|------------------------|-------|---|---|----|----|----|
| tijd <i>t</i> (jaar) | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 |
| aantal dieren <i>A</i> | 25000 | | | | | |

Tabel 2

- Lees uit de grafiek af in welk jaar de populatie gehalveerd is.
- Wordt het aantal dieren ooit 0 als het verval zo doorgaat?

Opgave 2

In de Duitse stad Hameln groeide ooit (in 1284) het aantal ratten exponentieel.

| | | | |
|--------------------------------|------|------|------|
| jaartal | 1282 | 1283 | 1284 |
| aantal ratten ($\times 100$) | 400 | 480 | 576 |

Tabel 3

Het gemeentebestuur wilde vanaf 1284 door inzet van een rattenvanger een even grote afname in procenten bewerkstelligen als de toename in de jaren daarvoor.

- Gebruik de aantallen voor 1282 en 1283 en bereken de groefactor van de toename in een decimaal nauwkeurig.
- Hoe groot wordt de groefactor bij een even grote procentuele afname vanaf 1284?
- Stel een formule op voor het aantal ratten *R*, met het aantal jaar *t* als tijdseenheid. Stel 1 januari 1284 op $t = 0$.
- Zijn er twee jaar na het begin van bestrijding weer evenveel ratten als twee jaar voor het begin?

Theorie en voorbeelden

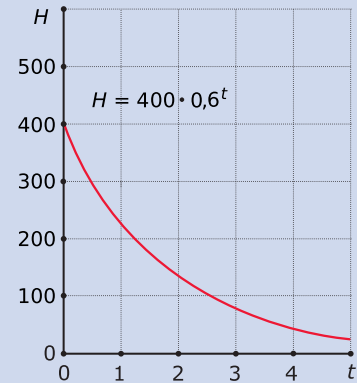
Om te onthouden

Bekijk de applet: exponentiële groei

De **formule bij exponentieel verval** heeft als vorm $H = b \cdot g^t$ met:

- b de beginhoeveelheid op $t = 0$;
- g de groeifactor met $0 < g < 1$;
- t het aantal tijdseenheden dat verlopen is;
- H de hoeveelheid op tijdstip t .

De bijbehorende grafiek zie je als $0 < g < 1$ in de figuur. Hij loopt steeds minder steil omlaag, maar de uitkomsten blijven boven 0 al komen ze er steeds dichterbij.



Figuur 3

Voorbeeld 1

De oppervlakte A van het regenwoud op Borneo is tussen 1950 en 2005 gehalveerd. Dat betekent een afname met 1,3% per jaar.

In 2005 bedroeg de oppervlakte nog ongeveer 360000 km².

Stel de formule op voor de afname van de oppervlakte van het regenwoud vanaf dat tijdstip. Geef aan waar A en t voor staan.

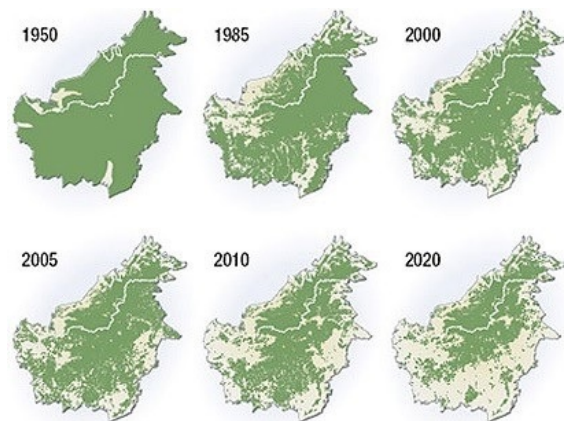
Antwoord

De beginwaarde is $b = 360000$ km².

De groeifactor g per jaar is $\frac{100-1,3}{100} = \frac{98,7}{100} = 0,987$.

De formule is daarom: $A = 360000 \cdot 0,987^t$.

Hierin is A de oppervlakte in km² en t de tijd in jaren.



Figuur 4 bron: <https://ontbossingedo.weebly.com/>

Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 1** de ontbossing op het eiland Borneo.

- Waarom ligt de groeifactor bij de afname van de oppervlakte van het regenwoud in het voorbeeld tussen 0 en 1?
- Laat met een berekening zien dat de gevonden groeifactor overeenkomt met de halvering van het bosgebied tussen 1950 en 2005.
- Als de afname van het regenwoud op Borneo zo doorgaat, hoeveel km² is er dan in 2030 nog op Borneo?
- Hoeveel procent van de hoeveelheid regenwoud in 1950 is er dan verdwenen?

Opgave 4

De populatie van bedreigde diersoort B bestond in 2008 uit 43000 exemplaren. De populatie nam 11% per jaar af.

- a Is hier sprake van exponentiële toename of van exponentieel verval?
- b Geef de formule voor het verloop van de populatie B afhankelijk van de tijd t in jaar.
- c Teken de grafiek voor het verloop van de populatie gedurende de eerste twintig jaar.
- d Lees uit de grafiek af in welk jaar de populatie gehalveerd is.

Voorbeeld 2

| vissoort | aantal | % | minimum aantal |
|-----------|--------|----|----------------|
| haring | 2000 | 18 | 750 |
| schol | 490 | 5 | 300 |
| kabeljauw | 280 | 30 | 150 |

Tabel 4

De grootte van de visstand in een gebied laat exponentieel verval zien. De tabel geeft van drie vissoorten het aantal vissen in het jaar 2000 weer met het verval in procenten en het minimum aantal vissen waarmee de soort nog kan overleven.

Geef een formule voor de hoeveelheid haring H .
In welk jaar wordt het minimumaantal voor haring bereikt?

Antwoord

Het begingetal voor de haring is $b = 2000$.
De groeifactor voor de haring is $g = \frac{100-18}{100} = 0,82$.

De bijbehorende formule is $H = 2000 \cdot 0,82^t$
Hierin is H de hoeveelheid haring en t de tijd in jaar na 2000.
Hiermee kun je deze tabel maken.

Het minimumaantal voor haring is 750. In 2005 wordt dit minimumaantal bereikt.

| tijd (jaar) | haring |
|-------------|--------|
| 2001 | 1640 |
| 2002 | 1345 |
| 2003 | 1103 |
| 2004 | 904 |
| 2005 | 741 |

Tabel 5

Opgave 5

Bekijk de tabellen in [Voorbeeld 2](#).

- a Geef een formule voor de hoeveelheid schol S na t jaar.
- b Geef een formule voor de hoeveelheid kabeljauw K na t jaar.
- c Vul de tabel in.

| tijd (jaar) | schol | kabeljauw |
|-------------|-------|-----------|
| 2001 | | |
| 2002 | | |
| 2003 | | |
| 2004 | | |
| 2005 | | |

Tabel 6

- d In welk jaar is het minimum voor kabeljauw overschreden?
- e Bereken in welk jaar het minimum voor schol wordt overschreden.

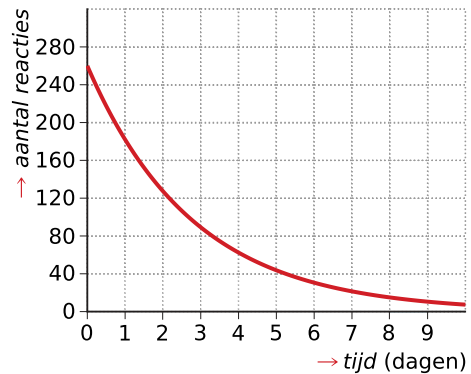
Verwerken

Opgave 6

Bekijk de grafiek met het aantal reacties op een blog op internet.

Welke uitspraken zijn waar?

- A. Er is sprake van een exponentiële toename.
- B. Er is sprake van een exponentiële afname.
- C. Er is sprake van exponentieel verval.
- D. Er is sprake van een lineaire afname.



Figuur 5

Opgave 7

Het aantal inwoners van een dorp op $t = 0$ is 7000. Dit dorp heeft te maken met procentuele afname van het aantal inwoners van ongeveer 0,5% per jaar. Je kunt bij dit verval een formule opstellen van de vorm $A = b \cdot g^t$.

- a Welk getal is b ?
 - A. 0
 - B. 0,5
 - C. 7000
- b Welk getal is g ?
 - A. 0,5
 - B. 0,995
 - C. 1,005
- c Welke formule is de juiste?
 - A. $A = 0,5^t$
 - B. $A = 7000 \cdot 0,995^t$
 - C. $A = 1,05 \cdot 7000^t$
- d Bereken A voor $t = 2$ afgerond op een geheel getal.
 - A. 1750
 - B. 3500
 - C. 6930

Opgave 8

Emke blaast een ballon op. De inhoud V is na het opblazen 9,2 liter. De ballon loopt daarna langzaam leeg. Er is sprake van exponentieel verval met formule

$$V = 9,2 \cdot 0,975^t.$$

Hierin is V de inhoud van de ballon in liter en t de tijd in uur.

- a Geef het begingetal b en de groefactor g .
- b Hoe zie je aan de formule dat er sprake is van exponentieel verval?
- c Bereken hoeveel liter lucht er na drie uur nog in de ballon zit. Rond af op één decimaal.
- d Met hoeveel procent neemt de inhoud per uur af?

- e Om te voorkomen dat de inhoud minder wordt dan 7,5 liter, moet de ballon weer op tijd worden opgeblazen. Na hoeveel uur moet de ballon weer opgeblazen worden?

De ballon heeft na enige tijd een inhoud van 7,5 liter. Op dat moment blaast Emke de ballon weer op. Met iedere ademstoot komt er ongeveer 0,3 liter lucht bij. De ballon knalt kapot als de inhoud groter wordt dan 10 liter.

- f Bereken bij welke ademstoot van Emke de ballon kapot knalt.

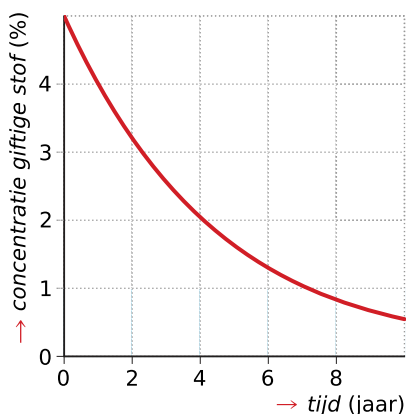
Opgave 9

Kirsten koopt een huis voor € 200000,00 en sluit een hypotheek af. Zij lost elk jaar 10% van de hypotheek af.

- a Geef de formule voor het verloop van de hypotheekschuld H afhankelijk van de tijd t in jaar na het afsluiten van de hypotheek.
- b Teken de grafiek voor het verloop van de hypotheekschuld gedurende de eerste negen jaar.
- c Lees uit de grafiek af na hoeveel jaar de hypotheekschuld is gehalveerd.
- d Bereken de hypotheekschuld na 25 jaar.

Opgave 10

Met water wordt een giftige stof uit verontreinigde grond gewassen. Een detector houdt de concentratie van de stof in het waswater bij. Die concentratie neemt exponentieel af. Bekijk de grafiek.



Figuur 6

Stel een formule op voor de concentratie C van deze stof. Neem als tijdseenheid het aantal jaar nadat met het wassen is begonnen.

Opgave 11

De stof ^{253}Fm (Fermium) wordt kunstmatig gemaakt. Per dag verdwijnt 20% van deze stof vanzelf. Daarom komt de stof niet in de natuur voor.

- a Hoe groot is de groeifactor g per dag?
- b Stel de formule op voor de overblijvende stof m als er 100 g Fermium wordt gemaakt. Neem de tijd t in dagen.
- c Hoeveel gram Fermium is er na 20 dagen over? Rond af op één decimaal.
- d Na hoeveel dagen is het overgebleven Fermium uit b gedaald naar minder dan 0,5 gram?

Toepassen

Opgave 12: Opslag kernafval

In 2003 is in Zeeland een gebouw geopend waarin kernafval uit Borssele wordt opgeslagen. Dit afval bestaat uit zes glasblokken met hoogradioactief afval.

In het begin geeft één blok evenveel warmte W af als een kachel van 1800 Watt. Na 100 jaar is de warmteafgifte verminderd tot 180 Watt. De warmteafgifte neemt exponentieel af.



Figuur 7

- Laat zien, dat dit betekent dat de groeifactor per jaar ongeveer 0,977 is.
- Geef de formule waarmee je de warmteafgifte per jaar berekent.
- Met hoeveel procent neemt de warmteafgifte per jaar af?

Het gebouw is knaloranje geverfd. In grote groene letters zijn er beroemde formules van Einstein en Planck op aangebracht. Elke tien jaar wordt het gebouw in een iets lichtere tint geschilderd om met de kleurtint de afname van de warmteafgifte aan te geven.

- Bereken het percentage waarmee de warmteafgifte in een periode van tien jaar afneemt. Rond af op twee decimalen.
- Na hoeveel jaar is de warmteafgifte voor het eerst minder dan de helft van de oorspronkelijke warmteafgifte?

Testen

Opgave 13

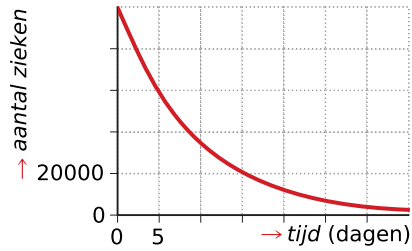
Iemand koopt een huis voor € 340000 en sluit een hypotheek af. Hij lost ieder jaar 15% van deze hypotheek af.

- Geef de formule voor het verloop van de hypotheekschuld H afhankelijk van de tijd t in jaren na het afsluiten van de hypotheek.
- Teken de grafiek voor het verloop van de hypotheekschuld gedurende de eerste tien jaar.
- Lees uit de grafiek af na hoeveel jaar de hypotheekschuld op deze manier is gehalveerd.

Opgave 14

Aan het begin van een griepepidemie neemt het aantal ziektegevallen exponentieel toe. Na een piek bereikt te hebben, neemt het aantal zieken exponentieel af met 10% per dag.

Bekijk de grafiek en stel een formule op voor het aantal zieken Z , met als tijdseenheid het aantal dagen na de piek van de griepepidemie.



Figuur 8



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostaat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
