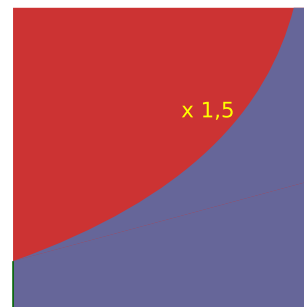


6.3 Formules

Inleiding

Bij exponentiële groei horen grafieken die er steeds ongeveer hetzelfde uitzien. En bij die grafieken passen dan weer formules die erg op elkaar lijken. Daar ga je nu mee werken.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- formules opstellen bij exponentiële groei en daarmee rekenen;
- grafieken maken bij exponentiële groei en er conclusies uit trekken.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- herkennen wanneer er sprake is van lineaire groei en wanneer er sprake is van exponentiële groei;
- bij exponentiële groei de groeifactor en het groeipercentage per tijdseenheid afleiden uit de gegevens en daarmee verder rekenen.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt op 1 januari 2015 een bedrag van € 750,00 op je spaarrekening staan, het hele jaar komt er niets bij. Je krijgt op deze spaarrekening 1,4% rente.

- In de vorige paragrafen heb je al berekend hoeveel geld er op 1 januari 2016 en op 1 januari 2017 op je bankrekening staat. Schrijf de twee berekeningen die daarbij horen eens onder elkaar, en zet die voor 1 januari 2018 er ook onder.
- Wat blijft er bij de drie berekeningen steeds hetzelfde?
- In een formule blijven de getallen staan die steeds hetzelfde zijn. Getallen die steeds veranderen noemen we 'variabelen', deze krijgen in een formule een letter.

Probeer een formule te maken waarmee je het bedrag op je spaarrekening kunt berekenen.

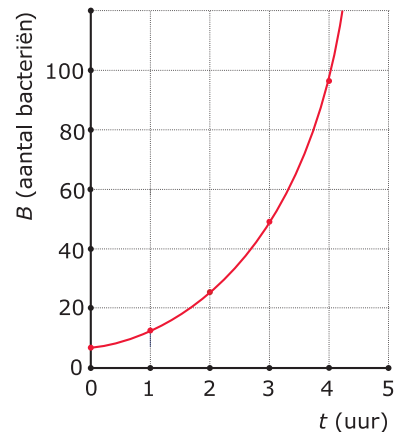
Uitleg

Een bepaalde soort bacteriën deelt zich elk uur. Dus elk uur wordt de hoeveelheid bacteriën 2 keer zo groot, de groeifactor per uur is 2. Je begint op $t = 0$ met 6 bacteriën. Dan verloopt het aantal zo:

- Op $t = 0$ zijn er 6 bacteriën;
- Op $t = 1$ zijn er $6 \cdot 2 = 12$ bacteriën;
- Op $t = 2$ zijn er $6 \cdot 2^2 = 24$ bacteriën;
- Op $t = 3$ zijn er $6 \cdot 2^3 = 48$ bacteriën;

Je kunt de bacteriegroei beschrijven met de formule: $A = 6 \cdot 2^t$ met t de tijd in uren en A het aantal bacteriën op tijdstip t .

Met zo'n formule kun je de hoeveelheid bacteriën op verschillende tijdstippen uitrekenen en een passende grafiek maken.



Figuur 2

Opgave 1

Een bioloog telt vijf jaar lang het aantal van een bepaalde vogelsoort. In de tabel zie je zijn gegevens.

jaar	2011	2012	2013	2014	2015
aantal vogels	3045	3350	3685	4053	4458

Tabel 1

- Neem $t = 0$ in 2011. Hoeveel is de 'beginhoeveelheid'?
- Er is sprake van exponentiële groei. Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar?
- Leid de formule af van de groei van de vogelpopulatie V .
- Hoeveel vogels zou deze bioloog in 2026 moeten aantreffen?

Opgave 2

Een bacterie van een bepaalde soort deelt zich elke 15 minuten. Een onderzoeker volgt het aantal bacteriën B vanaf een bepaald tijdstip $t = 0$, met t in uren. Op $t = 0$ zijn er 100 bacteriën.

- Stel een formule op voor B afhankelijk van t .
- Hoeveel bacteriën zijn er na 2 uur?
- Hoe lang duurt het voor er meer dan 100 miljoen bacteriën zijn?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: [exponentiële groei](#)

De **formule bij exponentiële groei** heeft als vorm $H = b \cdot g^t$ met:

- b de beginhoeveelheid op $t = 0$;
- g de groeifactor met $g > 1$;
- t het aantal tijdseenheden dat verlopen is;
- H de hoeveelheid op tijdstip t .

De bijbehorende grafiek zie je als $g > 1$ in de figuur. Hij loopt steeds steiler omhoog.

Voorbeeld 1

In een duingebied zitten naar schatting 2000 konijnen. Dat aantal K is exponentieel gegroeid met 10% per jaar. Ga er van uit dat deze groei de komende jaren zo door gaat. Bereken met behulp van de formule voor exponentiële groei het aantal konijnen na twintig jaar.

Rond het aantal konijnen af op honderdtallen.

Antwoord

Om de hoeveelheid K na t jaar te berekenen, stel je eerst de formule op.

Deze formule heeft de vorm $K = b \cdot g^t$.

Het begingetal is gelijk aan $b = 2000$ konijnen.

Uit het groeipercentage van 10% volgt de groefactor: $g = 1,10$.

De formule wordt $K = 2000 \cdot 1,10^t$.

Na 20 jaar geldt: $t = 20$ en dus $K = 2000 \cdot 1,10^{20} \approx 13454,999$.

Na 20 jaar zijn er ongeveer 13500 konijnen.

De exponentiële groei zal dus vermoedelijk niet in dit tempo door gaan...

Opgave 3

Stel er zijn in een bepaald gebied 174 konijnen en de groefactor van het aantal konijnen is 1,05 per jaar.

- Stel een formule op voor het aantal konijnen K na t jaar.
- Hoeveel konijnen zijn er na vijftien jaar? Gebruik de formule, rond het aantal konijnen af op tientallen.

Opgave 4

Een bioloog telt vijf jaar lang het aantal van een hazensoort in de duinen bij Wassenaar. Bekijk de gegevens in de tabel.

<i>tijd (jaar)</i>	2011	2012	2013	2014	2015
<i>aantal hazen</i>	30045	32298	34721	37325	40124

Tabel 2

- Stel een formule op voor de groei van de hazenpopulatie H met $t = 0$ in 2011. Geef de groefactor per jaar in drie decimalen nauwkeurig.
- Hoeveel hazen treft deze bioloog in 2020 aan? Rond het aantal af op honderdtallen.

Voorbeeld 2

Een Nederlandse en een Congolese stad hebben op 1 januari 2010 beide 200000 inwoners. De Nederlandse stad groeit met 0,5% per jaar. De Congolese stad groeit jaarlijks met 5,0%.

Vergelijk de bevolkingsgroei van de steden in een grafiek. Stel eerst bijpassende formules op.

Antwoord

Voor de Nederlandse stad N geldt:

- begingetal $b_N = 200000$
- groeifactor $g_N = \frac{100+0,5}{100} = 1,005$

Voor N krijg je de formule $H_N = 200000 \cdot 1,005^t$.

Hierin is H_N het aantal inwoners in de Nederlandse stad en t de tijd in jaar.

Voor de Congolese stad C geldt:

- begingetal $b_C = 200000$
- groeifactor $g_C = \frac{100+5,0}{100} = 1,05$

Voor C krijg je de formule $H_C = 200000 \cdot 1,05^t$.

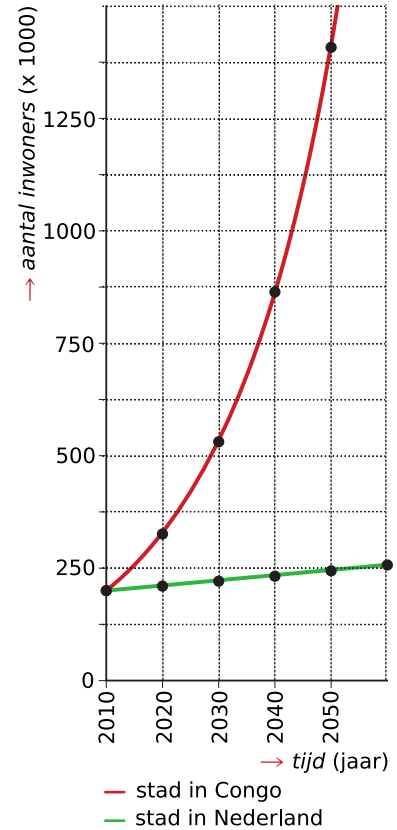
Hierin is H_C het aantal inwoners in de Congolese stad en t de tijd in jaar.

Zet de aantallen inwoners voor beide steden in een tabel met $t = 0$ in 2010.

Gebruik aantallen ($\times 1000$).

t (jaar)	H_N ($\times 1000$)	H_C ($\times 1000$)
2010	200	200
2020	210	326
2030	221	531
2040	232	864
2050	244	1408
2060	257	2293

Tabel 3



Figuur 3

Opgave 5

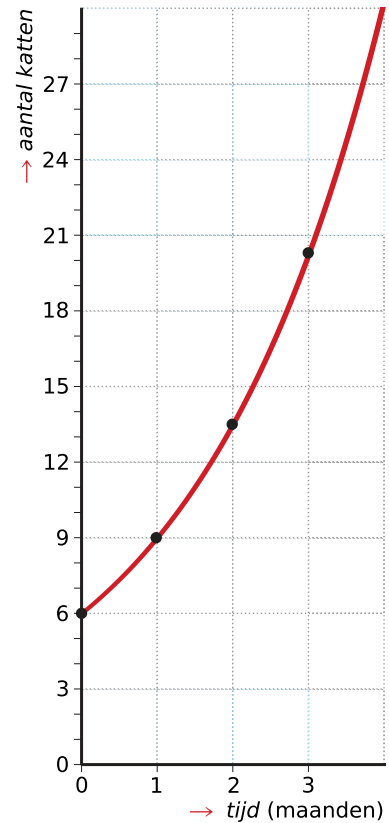
Bekijk de formules in [Voorbeeld 2](#).

- Bereken met de formule hoeveel inwoners de Nederlandse stad in 2035 heeft. Rond af op duizendtallen.
- Bereken met de formule hoeveel inwoners de Congolese stad in 2035 heeft.
- Welke bevolkingsaantallen hebben deze steden in 3000 als de groei zo door gaat?

Opgave 6

Een hondenopvangcentrum bouwt de service uit met de opvang van katten. Dat moet zich langzaam opbouwen, maar de kattenservice groeit exponentieel, zie de grafiek.

- a Lees de waarde bij $t = 0$ uit de grafiek af.
- b Lees uit de grafiek de groeifactor per maand af. Rond af op één decimaal.
- c Stel een formule op bij deze exponentiële groei.
- d Bereken het te verwachten aantal katten na één jaar.



Figuur 4

Opgave 7

Op 1 januari 2020 waren er 850 mensen in een bepaald gebied besmet met Covid-19. Dagelijks nam het aantal besmettingen met 3,5% toe.

- a Geef de groeifactor per dag.
- b Stel een formule op voor de groei van het aantal besmettingen A .
- c Vul de tabel in met behulp van de formule.
Let op! Reken met onafgeronde getallen door.

t (dagen na 1 jan.2020)	0	1	2	3	4	5
A	850					

Tabel 4

- d Teken een grafiek bij de tabel. Kies geschikte stapgroottes bij de assen. Op de y -as zet je het aantal besmettingen, begin te tellen vanaf 850. Op de x -as zet je de dagen. Bedenk dat voor $t = 0$ geldt dat het 1 januari is.
- e Hoeveel mensen waren er aan het eind van januari 2020 in dit gebied besmet met Covid-19?
Er wordt aangenomen dat de besmetting al eind 2019 in dit gebied is begonnen. Neem aan dat ook in de periode voor 1 januari 2020 dezelfde besmettingsfactor van 3,5% gold.
- f Hoeveel mensen waren er op 30 december in dit gebied besmet met Covid-19?

Verwerken

Opgave 8

Het aantal inwoners groeit exponentieel met de formule $A = b \cdot g^t$.

Hierin is A het aantal inwoners en t de tijd in jaar.

Op $t = 0$ zijn er 7000 inwoners. Het groeipercentage is 3%.

Kies het juiste antwoord.

- a** Hoe groot is het begingetal b ?
- A. 1,03
 - B. 3
 - C. 7000
- b** Hoe groot is de groeifactor g ?
- A. 1,0
 - B. 1,03
 - C. 1,07
- c** Welke formule hoort bij dit exponentiële verband?
- A. $A = 7000 \cdot 1,03^t$ met A het aantal inwoners en t de tijd in jaar.
 - B. $A = 1,03 \cdot 7000^t$ met A het aantal inwoners en t de tijd in jaar.
 - C. $A = 7000 \cdot 1,03^t$ met A het aantal inwoners en t de tijd in maanden.
- d** Hoe groot is het aantal inwoners op $t = 2$?
- A. 7210
 - B. 7426
 - C. 14420

Opgave 9

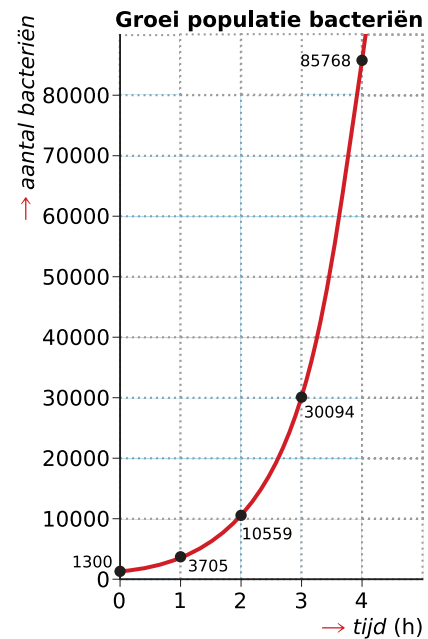
Als dieren uit andere streken in het wild worden losgelaten, kunnen ze een plaag worden, omdat ze geen natuurlijke vijanden hebben. Zo is op een eiland een konijnenplaag ontstaan. Vijf jaar geleden waren er 9000 konijnen geteld, nu zijn er 12600. Het aantal konijnen K groeit exponentieel.

- a** Stel de formule op voor K met als tijdseenheid vijf jaar. Neem aan dat vijf jaar geleden $t = 0$, dan is nu $t = 1$.
- b** Maak een tabel bij deze formule vanaf $t = 0$ tot en met 25 jaar daarna en teken de bijbehorende grafiek.
- c** Hoeveel jaar na de eerste telling zijn er meer dan 100.000 konijnen op dit eiland?

Opgave 10

De grafiek geeft een exponentieel verband weer van de groei van een populatie bacteriën per uur.

Stel de formule op die bij de grafiek hoort, met A het aantal bacteriën.



Figuur 5

Opgave 11

Duizenden ratten eten in een gebied in Afrika alles op wat ze tegenkomen. De ratten eten ook de verbouwde gewassen op, zodat de inwoners vrezen voor een gebrek aan voedsel. Op 1 januari 2000 heeft men geschat dat er in een bepaald gebied in Afrika ongeveer 5000 ratten leven. Het aantal ratten neemt elk half jaar met 30% toe.

- Geef de formule voor het aantal ratten R en de tijd t in halve jaren na 1 januari 2000.
- Bereken het aantal ratten op 1 juli 2016. Rond af op duizendtallen.
- Bereken met hoeveel procent het aantal ratten is toegenomen op 1 januari 2001 in vergelijking met 1 januari 2000.
- Bereken in welk jaar het aantal ratten voor het eerst meer dan 1 miljard is als er niets tegen de exponentiële groei ondernomen wordt.

Opgave 12

Een schip heeft olie op zee geloosd. De olievlek groeit elk uur ongeveer met een kwart van zijn oppervlakte. Als hij wordt ontdekt is de vlek 50000 m^2 groot.

- Stel de formule op voor het olieoppervlak O afhankelijk van de tijd t in uren.
- Maak een grafiek van de groei van de olievlek gedurende een periode vanaf 3 uur vóór tot 3 uur na het ontdekken van de ramp.
- Hoe groot zal de vlek 12 uur na het ontdekken ervan zijn geworden? Rond af op honderdtallen.
- De olie werd 10 uur geleden geloosd. Hoe groot was de vlek toen? Rond af op tientallen.

Toepassen

Opgave 13: Radioactief uranium

Bij radioactief uranium komen bij splijting van de kern twee kleine deeltjes vrij, die in staat zijn om bij botsingen met een uraniumkern een nieuwe splijting te veroorzaken. Dat is het principe van de eerste atoombom. Bij de splijting komt namelijk heel veel energie vrij.

- Van elke tien kernen die splijten zullen zeventien deeltjes binnen 0,01 microseconde een nieuwe kern splijten. Ga uit van tien kernen op $t = 0$ en stel de formule op voor het aantal splijtende kernen R met als tijdseenheid 0,01 microseconde.
- Hoeveel kernen zullen na 1 microseconde splijten?

Opgave 14: Reuzenpadden in Australië

In 1935 werden 102 reuzenpadden uit Hawaï overgebracht naar Australië. In 2007 waren de dieren verspreid over een gebied van 1,2 miljoen km² met 2000 exemplaren per hectare (hm²).

- Bereken het aantal reuzenpadden in 2007 in Australië in miljoen.
De populatie reuzenpadden is exponentieel gegroeid van 1935 tot 2007.
- Controleer dat het groeipercentage per jaar van het aantal reuzenpadden in Australië ongeveer 1,187 is.
- Geef de formule voor de groei van het aantal reuzenpadden in Australië in de periode 1935 tot 2007.
- De exponentiële groei zet op deze manier door. Wanneer zullen de reuzenpadden zich over een oppervlakte van 2 miljoen km² verspreid hebben?

Testen

Opgave 15

In een vijver groeit een waterlelie. De groei van de oppervlakte van het blad wordt beschreven met de formule $W = 1,3 \cdot 1,5^t$.

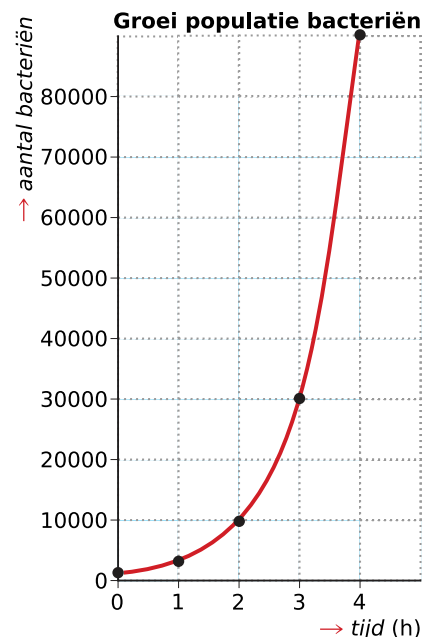
Hierin is W de oppervlakte van het blad van de waterlelie in m² en t de tijd in dagen. $t = 0$ is het moment dat de waterlelie wordt ontdekt, de oppervlakte is dan 1,30 m².

- Maak een grafiek van de groei van de waterlelie gedurende zes dagen na het ontdekken van de waterlelie met $t = 0$ tot en met $t = 6$. Rond in de tabel af op twee decimalen.
- Hoeveel dagen na het ontdekken van de waterlelie is de oppervlakte meer dan 20 m² geworden?

Opgave 16

Je ziet hier een grafiek van een exponentieel verband, namelijk dat van de groei van een populatie bacteriën per uur.

Stel een formule op die bij de grafiek past.



Figuur 6



© 2021

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
