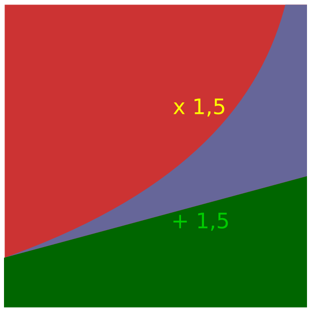
# 6.1 Groeifactoren

## Inleiding

Soms nemen hoeveelheden gelijkmatig toe of af. Dat heet lineaire groei.

Maar soms neemt een hoeveelheid met de tijd steeds sterker toe of steeds langzamer af. Een bekend voorbeeld is de groei van het aantal mensen op aarde. Die groei lijkt nog wel steeds sneller te gaan.




**Figuur 1**

### Je leert in dit onderwerp

- herkennen wanneer er sprake is van lineaire groei en wanneer er sprake is van exponentiële groei;
- bij exponentiële groei de groeifactor per tijdseenheid afleiden uit de gegevens en daarmee verder rekenen.

### Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- formules en grafieken bij lineaire verbanden maken en gebruiken;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode.

## Verkennen

### Opgave V1

Een kaars heeft een lengte van 30 cm. Ieder uur wordt de kaars 3 cm korter.

**a** Vul de tabel verder in.

| tijd (in uren) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| lengte kaars (in cm) | 30 | | | | | | | | | | |

**Tabel 1**

**b** Na hoeveel uur is de kaars opgebrand?

### Opgave V2

Je hebt op 1 januari 2015 een bedrag van € 750,00 op je spaarrekening staan, het hele jaar komt er niets bij. Je krijgt op deze spaarrekening 1,4% rente.

**a** Hoeveel euro krijg je er op 1 januari 2016 bij vanwege de rente?

**b** Hoeveel geld heb je op 1 januari 2016 in totaal op je rekening staan?

**c** De rente blijft gelijk en je haalt niets van je spaarrekening af en er komt verder ook niets bij. Hoeveel euro krijg je er op 1 januari 2017 bij?

**d** Leg uit waarom je antwoord bij vraag a niet hetzelfde is als bij vraag c.

## Uitleg 1

Stel je hebt € 100,00 en spaart er elke maand 4 euro bij.

Dit gebeurt er dan met je kapitaal:

| tijd $t$ (in maanden) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| kapitaal $K$ (in €) | 100 | 104 | 108 | 112 | 116 | ... | 180 |

**Tabel 2**

Omdat er per tijdseenheid een vast bedrag bijkomt, spreek je van lineaire groei.

Hierbij hoort de formule: $K = 100 + 4t$.
De grafiek bij het verband is een rechte lijn.

Stel je nu voor dat je € 100,00 hebt en daar elke maand 4% bij krijgt. De toename is dan $\frac{4}{100}$ deel van het kapitaal aan het begin van elke maand.

Dit gebeurt er dan met je kapitaal:

| tijd $t$ (in maanden) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| kapitaal $K$ (in €) | 100 | 104 | 108,2 | 112,5 | 117 | ... | 210,7 |

**Tabel 3**

In dit geval is sprake van exponentiële groei, het kapitaal groeit steeds sterker.

De grafiek bij dit verband is geen rechte lijn, maar loopt in dit geval steeds steiler omhoog.

### Opgave 1

Mijnheer en mevrouw Lont sparen en ze hebben allebei € 1600,00. Mijnheer Lont spaart daar elk jaar € 400,00 bij. Mevrouw Lont spaart elk jaar een kwart van het bedrag dat ze al heeft.

**a** Hoeveel heeft mijnheer Lont over 2 jaar?

**b** Hoeveel heeft mevrouw Lont over 2 jaar?

**c** Bij wie van beiden is sprake van exponentiële groei?

### Opgave 2

Een bedrijfje is gestart met een beginkapitaal van € 300000,00. De winst bedraagt in het eerste jaar € 7500,00. De winst wordt bij het kapitaal gevoegd.

**a** Hoeveel procent winst heeft het bedrijf in het eerste jaar?

**b** De winst wordt bij het bedrijfskapitaal gevoegd. Hoe groot is dit kapitaal na 2 jaar als de winst gelijk blijft aan € 7500,00?

**c** Hoe groot is het kapitaal na 2 jaar als het winstpercentage gelijk blijft?

**d** In welk van beide gevallen is de groei exponentieel?

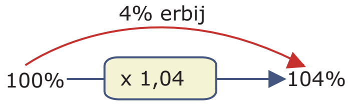
## Uitleg 2

Bij exponentiële groei wordt de hoeveelheid telkens per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd. Dit getal heet de groeifactor per tijdseenheid.

Zet je een bedrag van € 100,00 op een spaarrekening tegen een rente van 4% per jaar, dan groeit het kapitaal zo:

| tijd t (in jaren) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| kapitaal K (in €) | 100 | 104 | 108,20 | 112,5 | 117,0 | ... | 210,7 |

**Tabel 4**




Figuur 2

Je ziet:

- van $t = 0$ naar $t = 1$: vermenigvuldigingsfactor $\frac{104}{100} = 1{,}04$
- van $t = 1$ naar $t = 2$: vermenigvuldigingsfactor $108{,}\frac{2}{104} = 1{,}04$
- van $t = 2$ naar $t = 3$: vermenigvuldigingsfactor $112{,}\frac{5}{108}{,}2 = 1{,}04$

Er is een vaste vermenigvuldigingsfactor per jaar. Er is dus een groeifactor van 1,04 per jaar.

## Opgave 3

Een bioloog telt op drie verschillende broedplaatsen het aantal aalscholvers. Na drie jaar heeft hij het volgend resultaat:

| plaats | 1999 | 2000 | 2001 |
|---|---|---|---|
| stuwmeer | 24 | 60 | 60 |
| wad | 85 | 119 | 167 |
| slufter | 45 | 90 | 135 |

**Tabel 5**

**a** Beschrijf voor elk van deze plaatsen de soort groei. In één geval is sprake van exponentiële groei, hoeveel bedraagt daar de groeifactor per jaar?

**b** Hoeveel aalscholvers verwacht je in 2002 op het wad?

**c** Hoeveel aalscholvers waren er vermoedelijk in 2000 op het wad?

## Opgave 4

Het aantal inwoners van de USA groeit exponentieel:

| jaar | aantal inwoners (mln) | groeifactor |
|---|---|---|
| 1990 | 254,11 | ... |
| 1991 | 256,65 | 1,01 |
| 1992 | 259,22 | |
| 1993 | 261,81 | |
| 1994 | 264,43 | |
| 1995 | 267,07 | |

**Tabel 6**

**a** Bepaal in twee decimalen nauwkeurig de groeifactor per jaar voor de periode van 1992 tot en met 1995. Vul de tabel in.

**b** Waarom is er sprake van exponentiële groei?

**c** Hoe groot zal het aantal inwoners in 1996 geweest zijn?

**d** Hoe groot was het aantal inwoners in 1989?

# Theorie en voorbeelden

## Om te onthouden

Als bij een hoeveelheid $H$ per tijdseenheid een vast bedrag bij wordt opgeteld, spreek je van **lineaire groei**.

Hierbij hoort de formule: $H = b + a \cdot t$ waarin $b$ de starthoeveelheid op $t = 0$ is en $a$ de vaste hoeveelheid die er elke tijdseenheid bijkomt.
De grafiek bij het verband is een rechte lijn.

Als een hoeveelheid $H$ per tijdseenheid met een vast bedrag wordt vermenigvuldigd, spreek je van **exponentiële groei**, de hoeveelheid groeit dan steeds sterker.

De grafiek bij dit verband is geen rechte lijn, maar loopt in steeds steiler omhoog of steeds minder steil omlaag.

Bij exponentiële groei wordt de hoeveelheid telkens per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd. Dit getal heet de **groeifactor** per tijdseenheid.

## Voorbeeld 1

Bekijk de tabel met het aantal konijnen $a$ in een natuurgebied afhankelijk van de tijd $t$ in jaren.

Stel dat $t = 0$ overeenkomt met 1 januari 2012 en er éénmaal per jaar wordt gemeten.

| *tijd $t$* (jaar) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| *aantal konijnen $a$* | 122 | 134 | 147 | 162 | 178 |

**Tabel 7**

Laat zien dat jaarlijks het aantal konijnen met een vaste groeifactor toeneemt en dit aantal dus exponentieel groeit. Bereken die groeifactor per jaar op twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

De vermenigvuldigingsfactor voor het eerste jaar (periode $t = 0$ tot $t = 1$):
aantal konijnen op $t = 1$: 134
aantal konijnen op $t = 0$: 122

vermenigvuldigingsfactor eerste jaar = $\frac{134}{122} \approx 1{,}10$.

Voor alle volgende jaren blijft de vermenigvuldigingsfactor ongeveer gelijk:
$\frac{134}{122} \approx \frac{147}{134} \approx \frac{162}{147} \approx \frac{178}{162} \approx 1{,}10$.

Omdat er jaarlijks met dezelfde factor van 1,10 wordt vermenigvuldigd, is er van exponentiële groei sprake met groeifactor 1,10.

## Opgave 5

Bekijk de tabel met de groei van het aantal konijnen $a$ in een natuurgebied in Nederland van 2009 tot 2016.

Stel dat $t = 0$ overeenkomt met 1 januari 2009 en er wordt éénmaal per jaar gemeten.

| *tijd $t$* (jaar) | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *aantal $a$* | 1568 | 1929 | 2372 | 2918 | 3589 | 4415 | 5430 | 6679 |

**Tabel 8**

**a** Laat zien dat het aantal konijnen de hele periode 2009-2016 met een vaste groeifactor per jaar toeneemt.

**b** Hoeveel konijnen verwacht je in 2017?

**c** Hoeveel konijnen verwacht je in 2020?

### Opgave 6

Op een spaarrekening staat een bedrag van € 100,00 tegen een rente van 4% per jaar. De groei van het kapitaal is exponentieel. Bekijk de tabel.
Hierin is $K$ het kapitaal in euro en $t$ de tijd in jaar.

| *tijd* $t$ (jaar) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *kapitaal* $K$ (€) | 100,00 | ... | 108,16 | 112,49 | ... | ... | ... | 219,11 |

**Tabel 9**

**a** Bepaal de groeifactor per jaar. Rond af op twee decimalen.

**b** Vul de tabel verder in voor de jaren $t = 0$ tot en met $t = 5$.

**c** Bekijk de tabel. Op $t = 15$ is het kapitaal gegroeid tot € 180,09. Laat met een tabel zien hoe je dit berekent.

### Voorbeeld 2

Thomas Robert Malthus (1766-1834) beschouwde de toename van de wereldbevolking als exponentiële groei. Dit klopt niet helemaal want de groeifactoren tussen verschillende decennia verschillen een beetje. Ga hier toch, net als Malthus, uit van exponentiële groei.

In de tabel staan gegevens over de bevolkingsgroei in de negentiende eeuw.

**Figuur 3**

| *tijd* (jaar) | *bevolking* (miljoen) |
|---|---|
| 1800 | 1000 |
| 1810 | 1050 |
| 1820 | 1102 |
| 1830 | 1158 |
| 1840 | 1216 |
| 1850 | 1276 |
| 1860 | 1340 |
| 1870 | 1407 |
| 1880 | 1477 |

**Tabel 10**

Bereken de groeifactor per decennium (10 jaar) voor de periode tussen 1800 en 1880.
Bereken daarmee de grootte van de wereldbevolking in 1900 en in 2000. Rond af op miljoenen mensen.

Antwoord

De groeifactor per tien jaar over de hele periode bereken je als volgt:

vermenigvuldigingsfactor periode 1800-1810: $\frac{1050}{1000} = 1{,}05$

vermenigvuldigingsfactor periode 1810-1820: $\frac{1102}{1050} \approx 1{,}05$

etc.

De groeifactor per tien jaar voor de periode tussen 1800-1880 is ongeveer 1,05.

Met deze groeifactor bereken je de wereldbevolking in 1900: $1477 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 \approx 1709{,}8$.

In 1900 waren er ongeveer 1710 miljoen mensen op de wereld.

Als je zo door gaat met vermenigvuldigen met 1,05 kom je in 2000 uit op ongeveer 2652 miljoen mensen. Dat is echter veel minder dan echt het geval was. De groei is in werkelijkheid nog sneller gegaan.

### Opgave 7

Gebruik de tabel uit **Voorbeeld 2** met de exponentiële groei van de wereldbevolking. Rond steeds af op twee decimalen.

**a** Bereken de groeifactor over de periode tussen 1800 en 1850.

**b** Bereken de groeifactor over de periode tussen 1870 en 1880.

**c** Bereken de groeifactor over de periode tussen 1800 en 1880.

**d** Hoeveel inwoners waren er in 1920?

### Opgave 8

In landen met een hoge groeifactor neemt de bevolking snel exponentieel toe. Vaak zijn dat juist de armste landen. China heeft de bevolking in 1970 geboortebeperking opgelegd. Per gezin maximaal één kind. De groeifactor van de bevolking is daar sindsdien laag, namelijk 1,01.

Hier zie je de gegevens per 1 januari van het genoemde jaar van enkele landen.

| *land* | *aantal inwoners 2015* | *aantal inwoners 2016* |
|---|---|---|
| Congo-Kinshasa | 79375136 | 82470766 |
| Nigeria | 18045729 | 18406644 |
| China | 1367485388 | |

**Tabel 11**

**a** Bereken de groeifactor per jaar in Congo-Kinshasa.

**b** Bereken de groeifactor per jaar in Nigeria.

**c** Bereken het te verwachten aantal inwoners in China in 2016.

**d** Hoeveel inwoners verwacht je in Congo-Kinshasa in 2018? Rond af op miljoenen.

## Verwerken

### Opgave 9

Er is een duidelijk verschil tussen lineaire en exponentiële groei.

**a** Wat blijft bij lineaire groei gelijk?

**b** Wat blijft bij exponentiële groei gelijk?

### Opgave 10

Bedenk van de volgende situaties of sprake is van lineaire of exponentiële groei.

**a** Het aantal vlinders neemt jaarlijks met 0,4% toe.

**A.** Lineaire groei
**B.** Exponentiële groei

**b** De afstand van een boot tot de kust neemt toe met 25 mijl per uur.

**A.** Lineaire groei
**B.** Exponentiële groei

**c** Het weefsel van een wever groeit in een uur met 3 cm.

**A.** Lineaire groei
**B.** Exponentiële groei

**d** Van een fruitboom worden elk jaar van elke tak twee nieuwe takken behouden. Tel het aantal eind-takken.

**A.** Lineaire groei
**B.** Exponentiële groei

### Opgave 11

Gegeven is deze tabel.

**a** Bepaal of er sprake is van lineaire of van exponentiële groei.

**b** Wanneer hier sprake is van exponentiële groei, hoeveel dan de groeifactor?

| $t$ (in uur) | aantal |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 4 |
| 2 | 16 |

**Tabel 12**

### Opgave 12

De prijzen van levensmiddelen en luxe artikelen stijgen voortdurend. Daardoor wordt geld steeds minder waard. Het percentage waarmee de prijzen stijgen heet de prijsindex. Economen proberen de prijsindex laag te houden.

**a** Hoeveel kost een artikel van €1000,00 na 1 jaar als de prijsindex 2,4% bedraagt?

**b** En hoeveel na 2 jaar met een gelijkblijvende prijsindex?

**c** Wanneer zal de prijs over twee jaar hoger zijn: als de prijsindex per jaar 2,4% is of als de prijsindex per twee jaar 4,8% is?

**d** Hoeveel jaar zal het duren voor het artikel dat € 1000,00 kost, boven de € 1100,00 gaat kosten? Ga ervan uit dat de prijsindex 2,4% blijft.

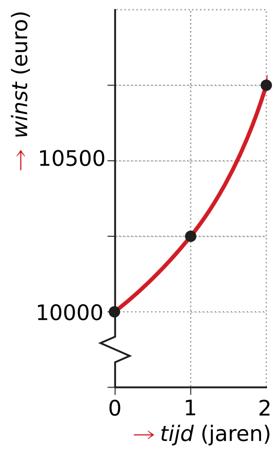
### Opgave 13

De grafiek geeft de groei van de winst van een bedrijf weer.

**a** Hoeveel bedraagt de winst aan het begin van het eerste jaar?

**b** Hoeveel bedraagt de winst aan het eind van het eerste jaar?

**c** Is er sprake van exponentiële groei?




**Figuur 4**

### Opgave 14

De bevolking van een stad Z bedraagt nu ongeveer 20000 mensen. Dat aantal groeit met 4% per jaar.

**a** Maak een bijbehorende tabel van het aantal mensen in Z met als tijd $t = 0, 1, 2$ en 3 jaren.

**b** Vul aan: Of er in een tabel sprake is van exponentiële groei kun je nagaan door ...

**c** Teken de grafiek die hoort bij de tabel bij a.

### Opgave 15

Jan neemt een vel papier van het formaat A4. Hij scheurt het doormidden en legt de beiden helften op elkaar. Hij scheurt de lagen nogmaals doormidden en legt de beiden helften op elkaar. Dat doet hij nog vier maal. Als hij dan de helften op elkaar heeft gelegd, krijgt hij de lagen niet meer doormidden gescheurd.

**a** Hoeveel lagen papier heeft hij inmiddels op elkaar?

**b** Leg uit dat het aantal lagen papier exponentieel groeit.

**c** Hoeveel bedraagt het vaste groeipercentage?

## Toepassen

### Opgave 16: Groei wereldbevolking in de 20e eeuw

In de tabel en de grafiek is de bevolkingsgroei van de wereldbevolking in de $20^e$ eeuw en het begin van de $21^e$ eeuw weergegeven.

| *tijd* (jaar) | 1900 | 1910 | 1920 | 1930 | 1940 | 1950 | 1960 | 1970 | 1980 | 1990 | 2000 | 2010 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *bevolking* (mld) | 1,65 | 1,75 | 1,86 | 2,07 | 2,30 | 2,54 | 3,03 | 3,70 | 4,45 | 5,29 | 6,12 | 6,91 |

**Tabel 13**

**a** Teken een bijpassende grafiek. Geeft de grafiek een lineair of een exponentieel verband weer? Licht je antwoord toe.

**b** Bereken de toename vanaf 1970 per tien jaar. Rond af op één decimaal.

**c** Laat zien, dat de toename van 1900 tot 1950 per tien jaar exponentieel is. Licht je antwoord toe met een berekening en rond de groeifactor af op één decimaal.

**d** Klopt de bij c berekende groeifactor per tien jaar in één decimaal ook voor de periode 1950-1970?

**e** Beantwoord vraag a nog eens met de berekeningen bij b en c.

**f** Hoe groot is de wereldbevolking in 2020 als de groei in hetzelfde tempo doorgaat? Rond af op tientallen miljoen mensen.

### Opgave 17: Kettingbrief

Iemand stuurt een brief naar 5 andere personen. In de brief staat de opdracht een kopie van de brief binnen een week weer naar 5 andere personen te sturen. Dus wordt het versturen van de brief telkens herhaald. Je noemt dit een kettingbrief. Als iedereen blijft meedoen en verschillende mensen niet naar dezelfde personen een brief sturen, groeit het aantal deelnemers aan een kettingbrief explosief. Ga daar in deze opgave van uit.

**a** Leg uit dat hier sprake is van exponentiële groei van het aantal personen dat per keer een brief krijgt.

**b** Hoe groot is de groeifactor?

**c** De personen die een brief ontvangen van de vijf personen die de initiatiefnemer van de kettingbrief heeft aangeschreven, horen bij de tweede ronde.

Hoeveel mensen zitten er in de tweede ronde?

**d** In welke ronde worden er 625 brieven verstuurd?

**e** Hoeveel brieven zijn er dan totaal verstuurd?

**f** Leg uit waarom zo’n kettingbrief op den duur niet langer kan worden voortgezet, zelfs niet als iedereen wel een keer zou willen meedoen.

# Testen

## Opgave 18

Een fabrikant heeft van een nieuw product het eerste jaar 6000 stuks verkocht en het tweede jaar 7200.

**a** Hoeveel stuks heeft de fabrikant het tweede jaar meer verkocht dan het eerste jaar?

**b** Hoeveel stuks verkoopt hij in het derde jaar als deze lineaire groei zich voortzet?

**c** Geef de formule die bij deze lineaire groei hoort. Neem $S$ voor het aantal stuks dat verkocht wordt en $t$ voor de tijd in jaren.

In het derde jaar worden er echter duidelijk meer exemplaren verkocht dan werd verwacht op grond van lineaire groei. De verkoop van het nieuwe product lijkt exponentieel door te groeien, zie de tabel.

| tijd (in jaren) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| aantal verkochte producten | 6000 | 7200 | 8640 | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

**Tabel 14**

**d** Welke groeifactor per jaar past bij deze tabel? Maak hem verder af en teken er een grafiek bij.

## Opgave 19

Bekijk de tabel.

| tijd $t$ in dagen | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| aantal $a$ | 483 | 532 | 591 | 660 | 732 | 811 | 903 | 1002 |

**Tabel 15**

**a** Laat met berekeningen zien dat hier (bij benadering) sprake is van exponentiële groei.

**b** Welk groeipercentage hoort er bij de tabel?

**c** Welk aantal verwacht je als $t = 9$?

**d** Wanneer komt het aantal voor het eerst boven de 2000?

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.