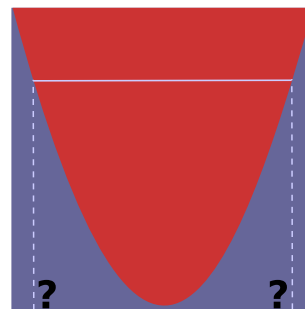


5.4 Kwadratische vergelijkingen

Inleiding

Ook bij kwadratische verbanden wil je vaak weten welke invoerwaarden er bij bepaalde uitkomsten horen. Je hebt met enkele rekentechnieken eerder kennism gemaakt. Nu ga je deze technieken gebruiken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- kwadratische vergelijkingen opstellen en systematisch oplossen.

Voorkennis

- herkennen dat een formule van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ een kwadratisch verband beschrijft en daaruit de top en de vorm van grafiek van de bijbehorende parabool (berg- of dalparabool) afleiden;
- bij formules van de vorm $y = x^2 + 2kx$ een kwadraat afsplitsen;
- kwadratische vergelijkingen oplossen door kwadraat afsplitsen en terugrekenen of de balansmethode;
- kwadratische vergelijkingen gebruiken om (een) snijpunt(en) te bepalen.

Verkennen

Opgave V1

Twee getallen zijn opgeteld 21 en vermenigvuldigd 108. Om welke getallen gaat dit?

- a** Probeer deze vraag vast te beantwoorden door een of twee tabellen te maken.

Je hebt nu waarschijnlijk wel het paar geschikte getallen gevonden. Je kunt dit probleem ook oplossen met een vergelijking.

- b** Welke vergelijking kun je hierbij opstellen?
- c** Kun je die vergelijking oplossen? Hoe?
- d** Wat is het voordeel van het werken met een vergelijking ten opzichte van een tabel maken en de antwoorden zoeken door proberen?

Uitleg


Twee getallen zijn opgeteld 21 en vermenigvuldigd 108. Om welke getallen gaat dit?

Je kunt dit oplossen door het uit te proberen of door systematisch inklemmen, maar dat is nogal wat werk.

Een andere aanpak is het opstellen van een vergelijking. Je kiest voor het ene getal bijvoorbeeld de letter x . Het andere moet dan $21 - x$ zijn. De uitkomst van hun vermenigvuldiging is gegeven, dus je krijgt de vergelijking: $x(21 - x) = 108$.

Als je de haakjes wegwerkt, zie je dat dit een kwadratische vergelijking is:

$$\begin{array}{l}
 x(21 - x) = 108 \\
 21x - x^2 = 108 \\
 -x^2 + 21x = 108 \\
 x^2 - 21x = -108
 \end{array}$$



Je hebt geleerd hoe je een kwadraat kunt afsplitsen. Met die methode kun je deze vergelijking schrijven als $(x - 10,5)^2 = 2,25$ en verder oplossen met de balansmethode.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je een kwadratische vergelijking oplost door een kwadraat af te splitsen.

- Laat zien dat uit $x^2 - 21x = -108$ volgt $(x - 10,5)^2 = 2,25$.
- Los de vergelijking verder op met de balansmethode.
- Geef antwoord op de vraag: "Twee getallen zijn opgeteld 21 en vermenigvuldigd 108." Om welke getallen gaat dit?

Opgave 2

Los op dezelfde manier als in de **Uitleg** de volgende vergelijkingen op.

Schrijf de oplossingen op met de wortel erin. Als de oplossing een geheel getal is, schrijf die oplossing er dan ook bij.

- $x^2 - 6x = 16$
- $x^2 - 6x = 17$
- $x^2 + 9x = 11$
- $x^2 = 5x$

Opgave 3

Een parabool wordt gegeven door de formule $y = x^2 + 14x + 2$.

- Bereken de snijpunten van deze parabool met de x -as.
- Los op: $y = 2$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **kwadratische vergelijking** is een vergelijking die in de vorm $ax^2 + bx = c$ is te schrijven. Hierin moet $a \neq 0$, want anders verdwijnt het kwadraat. Je kunt dergelijke vergelijkingen systematisch oplossen door:

- beide zijden door a te delen;
- de vergelijking door kwadraat afsplitsen te schrijven in de vorm $(x - p)^2 = q$;
- daarna terugrekenen of de balansmethode toepassen.

Op deze manier kun je elke kwadratische vergelijking oplossen, al is het soms wel een flink gereken.

Voorbeeld 1

Los de volgende vergelijking op:

$$2x^2 - 10x = 2x - 3$$

Antwoord

Het oplossen van zo'n vergelijking pak je systematisch aan.

$$\begin{array}{l}
 2x^2 - 10x = 2x - 3 \\
 2x^2 - 12x = -3 \\
 x^2 - 6x = -1,5 \\
 (x - 3)^2 - 9 = -1,5 \\
 (x - 3)^2 = 7,5 \\
 x - 3 = \pm\sqrt{7,5} \\
 x = 3 \pm \sqrt{7,5}
 \end{array}$$

↪ beide zijden $-2x$
↪ beide zijden delen door 2
↪ kwadraat afsplitsen
↪ beide zijden $+9$
↪ worteltrekken aan beide zijden
↪ beide zijden $+3$

Er zijn dus twee oplossingen, namelijk $x = 3 - \sqrt{7,5}$ en $x = 3 + \sqrt{7,5}$.

Opgave 4

Je ziet in **Voorbeeld 1** hoe je een kwadratische vergelijking systematisch oplost. Los de volgende vergelijkingen op met behulp van kwadraat afsplitsen.

- a $2x^2 - 8x = 12$
- b $x^2 - 5x = 7x$
- c $0,5x^2 - x = 2x + 3$
- d $4 - x^2 = 3x$

Opgave 5

Van een rechthoek is de lengte 6 eenheden groter dan 2 keer de breedte. De oppervlakte is 30. Bereken de exacte breedte van deze rechthoek.

Voorbeeld 2

Aan de voorkant van een huis bevindt zich een boogvormig kozijn. De parabolische boog wordt beschreven door $h = -2x^2 + 4,8x$. Een voordeur is 2,11 m hoog en 1,00 m breed. Controleer met een berekening of hij in dit kozijn past.

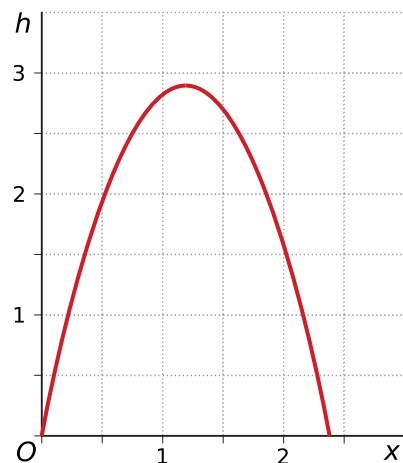
Antwoord

Op 2,11 m hoogte moet een breedte van 1 m beschikbaar zijn.

Los op: $h = -2x^2 + 4,8x = 2,11$.

Deze vergelijking levert in centimeters twee waarden voor x op: $x \approx 0,58$ en $x \approx 1,82$.

Daartussen zit een breedte van 1,24 m. Dus er is ruimte genoeg voor de deur.



Figuur 2

Opgave 6

Bekijk het probleem in **Voorbeeld 2**.

- a Waarom moet je alleen op een hoogte van 2,11 m nagaan of een deur van die breedte past?
- b Laat zien hoe de vergelijking kan worden opgelost.
- c Hoe kom je nu aan het getal 1,24?
- d Bereken hoeveel ruimte er aan weerszijden van de deur op de begane grond is.

Opgave 7

Twee getallen verschillen 2 van elkaar. Hun product is 55,25. Welke getallen zijn dit?

Je kunt dit probleem systematisch aanpakken door voor een van beide getallen een variabele te kiezen, bijvoorbeeld x .

- Wat weet je dan van het andere getal?
- Welke vergelijking kun je hiermee maken?
- Los de vergelijking uit b op.

Opgave 8

Boer Klein Harmelink heeft een rechthoekig weiland van 190 m bij 110 m. De smalle kant ligt tegen de weg en bevat het toegangshek. Aan de andere drie kanten moet een boswal op zijn land komen, die wordt overal even breed. De boer wil de breedte van de boswal zo bepalen dat hij nog 90% van de oppervlakte van het weiland overhoudt.

Hoe breed moet deze boswal worden?

Je kunt dit probleem systematisch aanpakken door voor de breedte van de boswal een variabele te kiezen, bijvoorbeeld x (m).

- Wat weet je dan van de lengte en de breedte van het overblijvende stuk land?
- Welke vergelijking kun je hiermee maken?
- Schrijf je vergelijking zo dat je een kwadraat kunt afsplitsen en de vergelijking kunt oplossen.

Verwerken

Opgave 9

Los de kwadratische vergelijkingen op.

- $x^2 + 6x = 16$
- $x^2 - 5x - 8 = 0$
- $2x^2 = 8x + 1$
- $0,1x^2 + x = 4$

Opgave 10

Twee getallen verschillen 5 en hun product is 204. Je wilt deze getallen berekenen.

- Stel een passende vergelijking bij dit probleem op.
- Bereken deze getallen met behulp van de vergelijking die je hebt gevonden.

Opgave 11

Los op.

- $x - x^2 = 0,25$
- $x(x + 4) = 2x + 8$
- $2x(x - 4) = 3 - 8x$
- $0,01x^2 - x = 0$

Opgave 12

Een parabolische boog is gegeven door de formule: $y = -0,1x^2 + 5x + 1$

- Bereken de coördinaten van de top van deze parabool.
- Los de kwadratische vergelijking op: $-0,1x^2 + 5x + 1 = 53,5$
- Waarom heeft de vergelijking $-0,1x^2 + 5x + 1 = 73,5$ geen oplossing?
- De vergelijking $-0,1x^2 + 5x + 1 = p$ heeft precies één oplossing. Welke waarde moet p dan hebben?

Opgave 13

Stel dat je een rechthoekig stuk land hebt van 50 m lengte en 30 m breedte. Je krijgt er in de lengte x meter bij als je in de breedte x meter inlevert.

- Schrijf een bijpassende formule op voor de oppervlakte van je nieuwe stuk land.
Je stuk land is nu 69 m^2 kleiner geworden.
- Bereken welke waarden x dan kan hebben.
- Is het ook mogelijk dat je stuk land even groot blijft? Zo ja, welke waarden kan x dan hebben?

Toepassen

Opgave 14: De p,q-formule

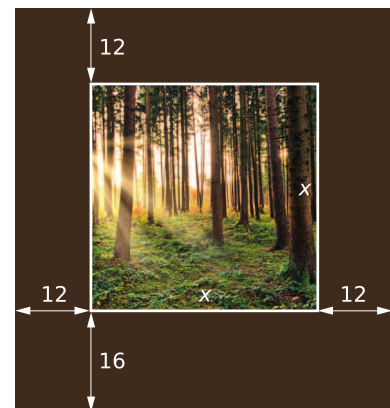
Het oplossen van een kwadratische vergelijking door het afsplitsen van een kwadraat gaat telkens op dezelfde manier.

- Los de vergelijking $x^2 + px = q$ op deze manier op.
- Laat zien hoe je het resultaat bij a kunt gebruiken om de vergelijking $x^2 + 6x = 20$ op te lossen.

Opgave 15: Fotolijst

Om een vierkante foto komt een brede rechthoekige lijst. De breedte van de lijst aan de onderkant van de foto is 16 cm. Aan de andere drie kanten is de lijst 12 cm breed. De foto met lijst krijgt daardoor een twee keer zo grote oppervlakte als de foto zonder lijst heeft.

- Schrijf een bijpassende formule op voor de oppervlakte van de foto met lijst. Noem de lengte en de breedte van de foto x .
- Bereken de waarde van x in mm nauwkeurig.



Figuur 3

Testen

Opgave 16

Los de volgende vergelijkingen op.

- $x^2 + 8x = 48$
- $x(x + 6) = 3x + 70$
- $5x(x - 10) = 5 - 50x$
- $0,05x^2 - x = 0$
- $0,5x^2 - 2x = 4x + 4$

Opgave 17

Van een rechthoek is de lengte 9 groter dan 3 keer de breedte. De oppervlakte is 120.

Bereken de exacte breedte van deze rechthoek.

Opgave 18

Tussen de woonkamer en de keuken van Robin en Denise zit een parabolische boog volgens de formule: $h = -2,5x^2 + 4,5x$.

Hierin is h de hoogte van de boog in meters en x de horizontale afstand gemeten vanaf linksonderaan de boog.


Bij een verhuizing moet er een kast door de boog getild worden. De kast is 0,5 m diep, en zowel 1,80 m hoog als 1,80 m breed.

Controleer met een berekening of de kast door de boog kan.

Practicum

Met *AlgebraKIT* kun je oefenen met **kwadratische vergelijkingen oplossen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.


Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostaat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
