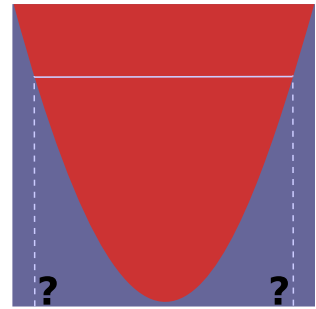


5.3 Kwadraat afsplitsen

Inleiding

Ook bij kwadratische verbanden wil je vaak weten welke invoerwaarden er bij bepaalde uitkomsten horen. Je hebt met enkele rekentechnieken eerder kennisgemaakt. Nu ga je leren een kwadraat af te splitsen.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- bij formules van de vorm $y = x^2 + 2kx$ een kwadraat afsplitsen;
- de top van een parabool bepalen door in de bijbehorende formule een kwadraat af te splitsen.

Voorkennis

- herkennen dat een formule van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ een kwadratisch verband beschrijft en daaruit de top en de vorm van grafiek van de bijbehorende parabool (berg- of dalparabool) afleiden;
- vergelijkingen van de vorm $a \cdot (x - p)^2 + q = c$ oplossen door terugrekenen of de balansmethode;
- kwadratische vergelijkingen gebruiken om (een) snijpunt(en) te bepalen.

Verkennen

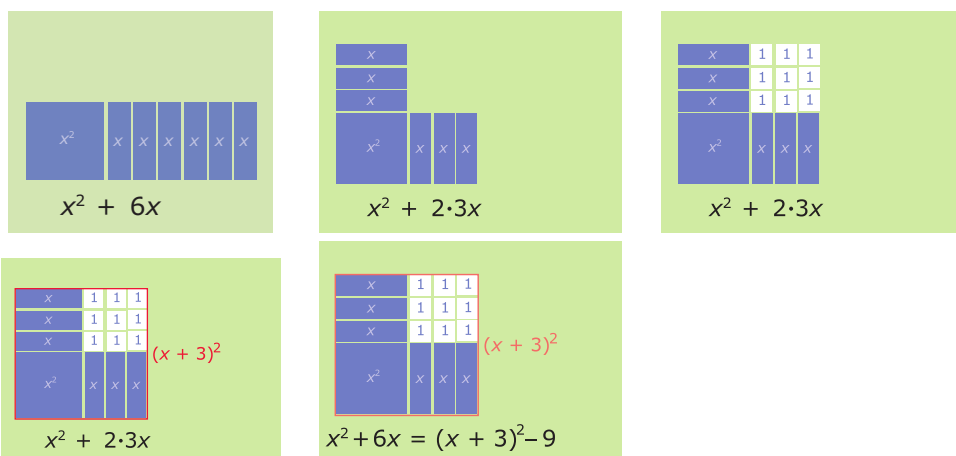
Opgave V1

Aan een tennistoernooi doen n deelnemers mee. Ze spelen allemaal precies twee keer tegen elkaar, dus het aantal wedstrijden is $w = n(n - 1) = n^2 - n$.

- Is hier sprake van een kwadratisch verband? Licht je antwoord toe.
- Laat zien dat de formule $w = (n - 0,5)^2 - 0,25$ hetzelfde verband beschrijft.
- Waarom weet je nu zeker dat het om een kwadratisch verband gaat tussen w en n ?

Uitleg 1

Een formule als $y = x^2 + 6x$ beschrijft ook een kwadratisch verband. Door herleiden kun je de formule de juiste kwadratische vorm geven, zodat je hierin de top en de verschuiving ten opzichte van $y = x^2$ kunt aflezen.



Figuur 2

Hier zie je hoe je $x^2 + 6x$ in een aantal stappen kunt 'ombouwen' tot de juiste kwadratische vorm.

Het herleiden van $y = x^2 + 6x$ tot $y = (x + 3)^2 - 9$ heet kwadraat afsplitsen. Je splitst van de uitdrukking $x^2 + 6x$ een kwadraat af, namelijk $(x + 3)^2$.

In het algemeen gebruik je bij kwadraat afsplitsen: $x^2 + 2kx = (x + k)^2 - k^2$.

Omdat $y = (x + 3)^2 - 9$, kun je zien dat er sprake is van een kwadratisch verband. De grafiek ontstaat door de grafiek van $y = x^2$ te verschuiven: 3 naar links en 9 naar beneden. De grafiek is een dalparabool met top $(-3, -9)$.

Opgave 1

Lees in **Uitleg 1** hoe je een kwadraat afsplitst.

- a** Gebruik de formule $y = x^2 + 6x$ uit de uitleg. Neem de tabel over en vul de tabel voor die formule in. Teken de grafiek bij deze formule.

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y											

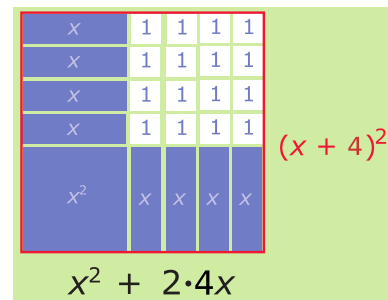
Tabel 1

- b** Bekijk in de uitleg hoe $y = x^2 + 6x$ herleid kan worden tot $y = (x + 3)^2 - 9$. Controleer deze herleiding door in de tweede vorm de haakjes weg te werken.
- c** Waarom is de vorm $y = (x + 3)^2 - 9$ voor deze formule handiger?

Opgave 2

Het afsplitsen van een kwadraat is een nuttige vaardigheid die je goed moet oefenen.

- Gebruik de figuur om van $x^2 + 8x$ een kwadraat af te splitsen.
- Splits een kwadraat af van $y = x^2 + 16x$.
- Splits een kwadraat af van $y = x^2 + 16x + 10$.
- Splits een kwadraat af van $y = x^2 - 6x = x^2 + -6x$.



Figuur 3

Opgave 3

Bij kwadraat afsplitsen maak je gebruik van $x^2 + 2kx = (x + k)^2 - k^2$.

- Laat zien dat dit klopt door de haakjes weg te werken.
- Laat zien dat $x^2 + px = \left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 - \frac{1}{4}p^2$.
Stel je hebt de formule $y = 3x^2 + 6x$.
Je kunt ook dan een kwadraat afsplitsen. Daartoe schrijf je $y = 3(x^2 + 2x)$.
- Laat zien dat dit klopt door de haakjes weg te werken.
- Splits nu binnen de haakjes een kwadraat af en schrijf de formule in de vorm $y = a(x + p)^2 + q$.
- Welke top heeft de bijbehorende parabool?

Uitleg 2

Een formule als $y = 2x^2 + 12x + 5$ beschrijft ook een kwadratisch verband.

Om deze formule in de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ te brengen maak je eerst gebruik van het werken met haakjes.

Je weet al, dat $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Dat heb je gebruikt bij haakjes wegwerken.

Omgekeerd is $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$.

Je zegt dan dat je de factor a buiten haakjes hebt gebracht.

Bekijk met dit in gedachten de formule $y = 2x^2 + 12x + 5$.

De formule kun je schrijven als:

$$2x^2 + 12x + 5 = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot 6x + 2 \cdot 2,5 = 2 \cdot (x^2 + 6x + 2,5).$$

En nu kun je een kwadraat afsplitsen:

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 12x + 5 \\ &= 2 \cdot (x^2 + 6x + 2,5) \\ &= 2 \cdot ((x + 3)^2 - 9 + 2,5) \\ &= 2 \cdot (x + 3)^2 - 18 + 5 \\ &= 2 \cdot (x + 3)^2 - 13 \end{aligned}$$

Nu kun je concluderen dat de grafiek van $y = 2x^2 + 12x$ een bergparabool is met top $(-3, -13)$.

Opgave 4

Lees in **Uitleg 2** hoe je een kwadraat afsplitst door eerst een factor buiten haakjes te halen.

Schrijf op dezelfde manier de volgende formules in de vorm $y = a(x + p)^2 + q$. Bepaal ook of er sprake is van een dalparabool of een bergparabool en schrijf de coördinaten van de top op.

- $y = 3x^2 + 6x + 1$
- $y = 3x^2 - 6x$

c $y = -0,5x^2 - 6x + 2$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een formule van de vorm $y = x^2 + 2kx$ kun je herleiden tot $y = (x + k)^2 - k^2$.

Dit heet **kwadraat afsplitsen**: $x^2 + 2kx = (x + k)^2 - k^2$.

Omdat $y = x^2 + 2kx = (x + k)^2 - k^2$, kun je zien dat er sprake is van een kwadratisch verband.

De grafiek ontstaat door de grafiek van $y = x^2$ te verschuiven: k naar links en k^2 naar beneden. De grafiek is een dalparabool met top $(-k, -k^2)$.

Je kunt dit heel goed gebruiken bij het oplossen van vergelijkingen waarin kwadraten voorkomen.

Bij formules van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ kun je ook een kwadraat afsplitsen.

Je begint dan met het schrijven van de formule als $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$.

Dit heet **een factor buiten haakjes halen**.

Vervolgens splits je op de vorm binnen de haakjes een kwadraat af. Zie **Voorbeeld 2**.

Voorbeeld 1

Laat zien dat de formule $y = x^2 - 6x + 8$ een kwadratisch verband beschrijft.

Bereken ook de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool en bereken de nulpunten.

Antwoord

Splits een kwadraat af van de vorm $x^2 - 6x$.

Je krijgt: $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$.

De formule kun je daarmee herleiden tot: $y = (x - 3)^2 - 1$.

Nu zie je dat er sprake is van een dalparabool met top $(3, -1)$.

Voor de snijpunten met de x -as moet je $y = 0$ oplossen.

Door het kwadraat afsplitsen kun je dit schrijven als $(x - 3)^2 - 1 = 0$.

En die vergelijking kun je oplossen door terugrekenen.

Ga na, dat je krijgt: $x = 2 \vee x = 4$.

Opgave 5

Bekijk.

- a Waarom wordt er een kwadraat afgesplitst?
- b Waaraan zie je dat er sprake is van een dalparabool met top $(3, -1)$?
- c Waarom is het nuttig om de top van de parabool te weten?
- d Waarom heeft deze parabool nulpunten? Bereken zelf deze nulpunten.

Opgave 6

Splits een kwadraat af.

- a $y = x^2 + 2x$
- b $y = x^2 - 4x$
- c $y = x^2 - 10x + 20$
- d $y = 12 - 8x + x^2$

Opgave 7

Gegeven is de formule $y = x^2 + 5x - 6$. Er bestaat een kwadratisch verband tussen x en y .

- Laat dat zien en bepaal de top van de parabool die de grafiek bij deze formule is.
- Teken de grafiek bij deze formule.
- Bereken de nulpunten van deze grafiek.

Voorbeeld 2

Bereken de top van de parabool die wordt gegeven door de formule $y = -2x^2 - 16x + 2$.

Antwoord

Je wilt de formule in de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ brengen, dan kun je de top uit de formule aflezen. Daarvoor moet je een kwadraat afsplitsen.

Gebruik: $-2x^2 - 16x + 2 = -2 \cdot (x^2 + 8x - 1)$.

Nu kun je binnen de haakjes een kwadraat afsplitsen.

Je herleidt de formule dan zo:

$$y = -2x^2 - 16x + 2$$

$$y = -2(x^2 + 8x - 1)$$

$$y = -2((x + 4)^2 - 16 - 1)$$

$$y = -2(x + 4)^2 + 34$$

Nu kun je de top aflezen en daarmee een geschikte tabel maken om de parabool te tekenen.

Opgave 8

In zie je hoe je de top van een bergparabool kunt vinden.

- Kun je al meteen aan de formule zien dat er sprake is van een bergparabool?
- Bekijk nog eens goed hoe de formule is herleid tot een vorm waaruit je de top kunt aflezen. Doe dit zelf zonder naar het voorbeeld te kijken.
- Welke coördinaten heeft de top van deze parabool?
- Bereken de nulpunten van deze parabool.

Opgave 9

Schrijf de volgende kwadratische formules in de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ en bepaal de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool.

- $y = 2x^2 - 8x + 6$
- $y = 3x^2 - 15x$
- $y = 0,1x^2 - 4x + 1$

Verwerken

Opgave 10

Gegeven is de formule $y = x^2 - 10x + 5$.

Laat zien dat er een kwadratisch verband bestaat tussen y en x en bereken de top van de bijbehorende parabool.

Opgave 11

Splits een kwadraat af.

- a $x^2 + 12x$
- b $x^2 + 13x$
- c $x^2 - 12x + 46$
- d $5x + x^2$
- e $2x^2 - 14x - 24$

Opgave 12

Gegeven is de formule $y = 0,1x^2 - 10x + 5$.

Laat zien dat er een kwadratisch verband bestaat tussen y en x en bereken de top van de bijbehorende parabool.

Opgave 13

Los de volgende vergelijkingen op door eerst een kwadraat af te splitsen.

- a $x^2 + 4x = 0$
- b $2x^2 - 6x + 4 = 0$

Opgave 14

Als je een tennistoernooi organiseert waarbij alle spelers één keer tegen elkaar moeten spelen, dan kun je berekenen hoeveel wedstrijden er nodig zijn afhankelijk van het aantal spelers.

- a Er zijn n spelers. Leg uit dat het aantal wedstrijden w afhankelijk van n is volgens de formule: $w = \frac{1}{2}n(n-1)$.
- b Laat door haakjes wegwerken en kwadraat afsplitsen zien dat er sprake is van een kwadratisch verband tussen w en n .
- c Er kunnen maximaal 300 wedstrijden in deze competitie worden gespeeld. Hoeveel deelnemers kunnen er dan maximaal zijn?

Opgave 15

Een kogelstootster stoot haar kogel volgens een mooie parabolische baan. Die baan is door haar coach gefilmd en hij heeft er een formule van op laten stellen. Bij deze baan past de formule $h = -0,026x^2 + 0,52x + 1,80$.

Hierin is h de hoogte van het midden van de kogel boven een punt op de grond dat x m verwijderd is van het punt recht onder het midden van de kogel op het moment van loslaten.

- a Op welke hoogte werd de kogel losgelaten?
- b Bereken het hoogste punt van de baan van de kogel.
- c Bereken de afstand die deze kogelstootster haalt.

Toepassen

Opgave 16: Portieken

Deze twee portieken zijn ontworpen door een architect die hoorde tot de Amsterdamse School. Er wordt beweerd dat ze een mooie paraboolvorm hebben. Je zou die vorm van de rand van het metselwerk langs beide kozijnen moeten kunnen beschrijven met formules. Neem je in het midden tussen beide portieken een verticale h -as en verder de horizontale x -as precies over de stoep, dan vind je $h_1 = -5x^2 + 11x - 2,85$ en $h_2 = -5x^2 - 11x - 2,85$.

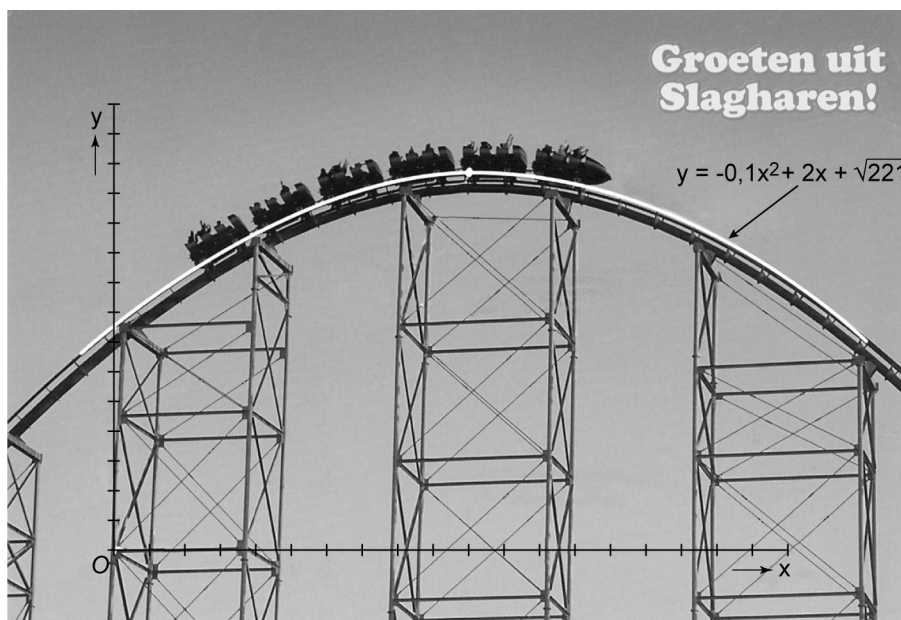


Figuur 4

- Van welke hoogte van de kozijnen is daarbij uitgegaan?
- Hoe breed is dan de opening van elk portiek op de grond?
- Teken beide portieken als deze formules kloppen. Is er werkelijk sprake van een paraboolvorm?

Opgave 17: Groeten uit Slagharen

Een fabrikant van practicummateriaal voor natuurkunde heeft in 2009 als reclame deze ansichtkaart verstuurd aan alle scholen in Nederland.



Figuur 5

De formule die hoort bij de vorm van de achtbaan is: $H = -0,1a^2 + 2a + \sqrt{221}$.

- Hoe hoog is de achtbaan bij een horizontale afstand van 0 m?
- Bereken in twee decimalen nauwkeurig de hoogte van het hoogste punt van dit deel van de achtbaan.
- Welke nulpunten heeft deze grafiek? Rond je antwoorden af op een decimaal.

(naar: examen wiskunde vmbo-tl in 2011, tweede tijdvak)

Testen

Opgave 18

Gegeven is de formule $y = x^2 + 4x - 8$. Er bestaat een kwadratisch verband tussen x en y .

- a** Laat dat zien en bepaal de top van de parabool die de grafiek bij deze formule is.
- b** Welke nulpunten heeft deze grafiek? Rond je antwoorden af op een decimaal.

Opgave 19

Schrijf de volgende kwadratische formules in de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ en bepaal de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool.

- a** $y = 3x^2 - 18x + 24$
- b** $y = -0,1x^2 + 8x - 2$

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **kwadraat afsplitsen en vergelijkingen daarmee oplossen**.

Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



© 2025

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
