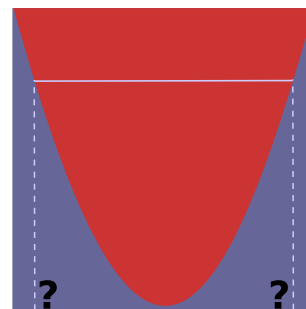


5.2 Terugrekenen

Inleiding

Ook bij kwadratische verbanden wil je vaak weten welke invoerwaarden er bij bepaalde uitkomsten horen. Tot nu toe deed je dat met behulp van grafieken. Maar er bestaan ook rekentechnieken voor. Je hebt daar al eerder kennis mee gemaakt.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- vergelijkingen van de vorm $a \cdot (x - p)^2 + q = c$ oplossen door terugrekenen of de balansmethode;
- kwadratische vergelijkingen gebruiken om (een) snijpunt(en) te bepalen.

Voorkennis

- herkennen dat een formule van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ een kwadratisch verband beschrijft en daaruit de top en de vorm van grafiek van de bijbehorende parabool (berg- of dalparabool) afleiden;
- grafieken bij kwadratische verbanden tekenen en die gebruiken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen;
- vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode en terugrekenen (dus ook wortel-trekken).

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: eenvoudige kwadratische vergelijkingen

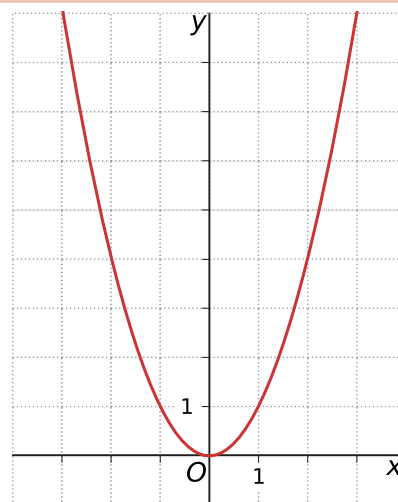
Hier zie je een grafiek bij de formule $y = x^2$.

Daarbij kun je vergelijkingen krijgen zoals $x^2 = 9$, $x^2 = 8$, $x^2 = 0$, $x^2 = -3$, enzovoorts.

In de applet kun je de oplossing zien van dergelijke vergelijkingen.

Ze hebben de vorm $x^2 = p$.

- Welke oplossing heeft de vergelijking $x^2 = 9$?
- Welke exacte oplossing heeft de vergelijking $x^2 = 8$?
- Welke oplossing heeft de vergelijking $x^2 = 0$?
- Welke oplossing heeft de vergelijking $x^2 = -3$?
- De oplossing van de vergelijking $x^2 = p$ kan uit meerdere waarden voor x bestaan. Uit hoeveel maximaal? En wat betekent dit voor p ?



Figuur 2

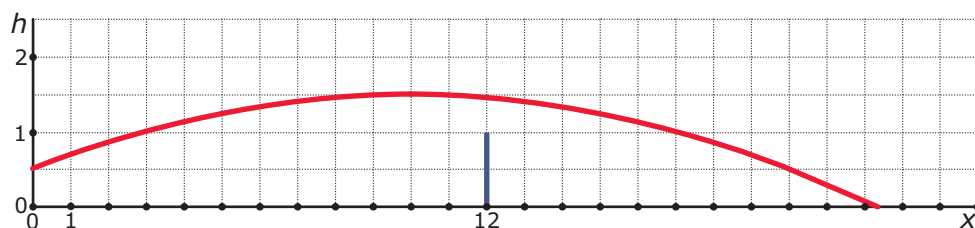
Uitleg

Bekijk de applet: tennisbal

Een tennisser is aan het trainen. Op de baseline tegenover hem schiet een tenniskanon met grote snelheid een bal op hem af, precies over de lengte van het veld. Het tennisveld is 24 m lang en het net is 1 m hoog.

De baan van de bal is een kromme lijn. In het getekende assenstelsel geldt voor die baan de formule:

$$h = -0,01 \cdot (x - 10)^2 + 1,5.$$



Figuur 3

Wil je weten na hoeveel meter (bij welke x -waarde) de bal op de grond komt, dan moet je oplossen:

$$-0,01 \cdot (x - 10)^2 + 1,5 = 0$$

Dit is een voorbeeld van een kwadratische vergelijking die je kunt oplossen door terugrekenen. Terugrekenen van een kwadraat doe je met worteltrekken.

De exacte oplossing is $x = 10 - \sqrt{150}$ v $x = 10 + \sqrt{150}$.

Je ziet hoe je dit kort kunt opschrijven met behulp van het teken v. Dat betekent "en/of".

Deze waarden van x waar de y -coördinaat 0 is heten nulpunten van de parabool. In het voorbeeld van de tennisbaan is het nulpunt de x -waarde van de plek waar de tennisbal op de grond komt.

Opgave 1

Bekijk de [Uitleg](#). Je ziet een formule voor de baan die een tennisbal onder bepaalde omstandigheden aflegt. De speler slaat de bal aan de andere kant van het net terug voor hij de grond raakt. Hij raakt de bal op 0,29 m boven de grond.

- a** Je wilt weten op welke punten in zijn baan de bal op 0,29 m hoogte zit. Welke vergelijking hoort daarbij?

Bij de formule voor de parabolische baan van de bal kun je een rekenschema maken.

$$x \xrightarrow{-10} x - 10 \xrightarrow{(\dots)^2} \dots \xrightarrow{\times -0,01} \dots \xrightarrow{+ 1,5} y$$

Figuur 4

- b** Neem het rekenschema over en vul de juiste uitdrukkingen in.

Bij het rekenschema hoort een terugrekenenschema zoals dit.

$$\begin{array}{ccccccc} \xleftarrow{+ 10} & \xleftarrow{\sqrt{\dots}} & \xleftarrow{/ -0,01} & \xleftarrow{- 1,5} & y \\ \xleftarrow{+ 10} & & & & \end{array}$$

Figuur 5

- c** Neem nu $y = 0,29$ en vul het terugrekenenschema met getallen in.
d Hoe ver staat de speler van het tenniskanon verwijderd?

Opgave 2

Je wilt ook weten of de bal 'in' zou zijn geweest. Dat betekent dat je wilt berekenen waar de bal op de grond zou zijn gekomen als er geen speler was geweest om hem terug te slaan. Je wilt dus een nulpunt van de parabool vinden.

- Welke vergelijking hoort daarbij?
- Hoeveel nulpunten heeft de parabool?

Bij het rekenschema, kun je nu ook een terugrekenschema maken. De wortel komt nu niet op een geheel getal uit, dus die laat je in het antwoord staan.

- Neem $y = 0$ en maak een terugrekenschema met getallen. Welke oplossing heeft deze vergelijking?
- Hoe ver van het tenniskanon komt de bal op de grond?
- Was de bal 'in'?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **kwadratische vergelijking** van de vorm $a(x - p)^2 + q = c$ kun je systematisch oplossen door **terugrekenen** (of met de balansmethode). Terugrekenen vanuit een kwadraat doe je met wortel-trekken.

Zie **Voorbeeld 1**.

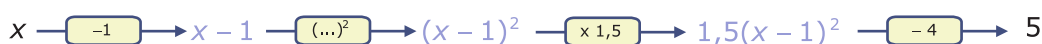
De oplossing bestaat vaak uit twee x -waarden. Je gebruikt dan het teken $\vee$ om aan te duiden dat de éne x -waarde en/of de andere x -waarde juist is.

De x -waarde van een punt van de parabool waarvoor geldt dat $y = 0$ is heet een **nulpunt** van de parabool. Let op! Een nulpunt is een getal en dus geen punt met coördinaten.

Voorbeeld 1

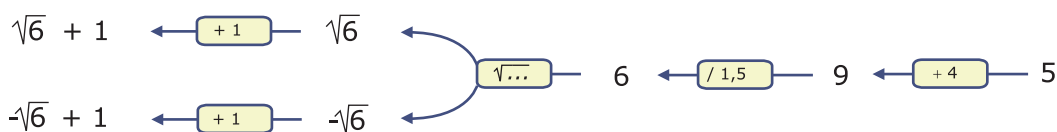
De vergelijking $1,5(x - 1)^2 - 4 = 5$ kun je oplossen door terugrekenen.

Eerst maak je een rekenschema:



Figuur 6

Daarbij past een terugrekenschema. Vul meteen de getallen in:



Figuur 7

De exacte oplossing van de vergelijking is: $x = -\sqrt{6} + 1 \vee x = \sqrt{6} + 1$.

Soms wordt een benadering gevraagd. In dat geval benader je met de rekenmachine deze twee waarden in het gewenste aantal decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

De grafiek van $y = -0,5(x + 1)^2 + 5$ heeft twee nulpunten.

- Welke vergelijking moet je oplossen om de nulpunten te vinden?
- Los de vergelijking op. Gebruik een terugrekenschema.
- Welke coördinaten hebben de snijpunten met de x -as?
- Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $-0,5(x + 1)^2 + 5 = 5$?

- e Bepaal de oplossing(en) van de vergelijking bij d. Heb je voor het bepalen van die oplossing(en) een terugrekenenschema nodig?

Opgave 4

Los de volgende vergelijkingen exact op.

- a $x^2 = 17$
 b $2,5x^2 = 50$
 c $2,5x^2 + 5 = 10$
 d $5(x - 8,5)^2 - 12,5 = 100$

Voorbeeld 2

De vergelijking $1,5(x - 1)^2 - 4 = 5$ kun je ook oplossen met de balansmethode.

$$\begin{array}{rcl}
 1,5(x - 1)^2 - 4 & = & 5 \\
 1,5(x - 1)^2 & = & 9 \quad \text{beide zijden } +4 \\
 (x - 1)^2 & = & 6 \quad \text{beide zijden delen door } 1,5 \\
 x - 1 & = & \pm\sqrt{6} \quad \text{beide zijden worteltrekken} \\
 x & = & 1 \pm \sqrt{6} \quad \text{beide zijden } +1
 \end{array}$$

De exacte oplossing is $x = 1 - \sqrt{6} \vee x = 1 + \sqrt{6}$. Je ziet hoe je dit kort kunt opschrijven met $\pm$.

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen exact op met de balansmethode.

- a $0,5x^2 + 1 = 5,5$
 b $8 - x^2 = 3$
 c $4,5x^2 = 50 - 0,5x^2$
 d $0,5 \cdot (x - 4)^2 + 3 = 11$
 e $6 - (x + 2)^2 = 0$

Opgave 6

Bekijk de kwadratische formule $y = 2,5(x + 1)^2 - 5$.

- a Bepaal de top van de bijbehorende parabool en maak bij deze formule een geschikte tabel. Teken vervolgens de grafiek.
 b Bereken in twee decimalen nauwkeurig de nulpunten van deze parabool door de bijbehorende vergelijking op te lossen.
 c Bekijk de vergelijking $2,5(x + 1)^2 - 5 = a$. Voor welke waarde van a heeft deze vergelijking precies één oplossing?
 d Voor welke waarden van a heeft de vergelijking uit c geen oplossing?

Opgave 7

In de applet in het [Practicum](#) kun je zien wat je doet als je een vergelijking van de vorm $a(x - p)^2 + q = r$ oplost.

- a Neem eerst $a = 1,5$, $p = 1$, $q = -4$ en $r = 2$ en los de bijbehorende vergelijking op. Controleer je antwoord met de applet.
 b Neem eerst $a = -2$, $p = 2$, $q = 3$ en $r = -5$ en los de bijbehorende vergelijking op. Controleer je antwoord met de applet.

Voorbeeld 3

Los op: $x^2 = (x + 3)^2$.

Antwoord

Gebruik de balansmethode en werk eerst de haakjes weg:

$$\begin{aligned}
 x^2 &= (x + 3)^2 \\
 x^2 &= x^2 + 6x + 9 && \text{haakjes wegwerken} \\
 0 &= 6x + 9 && \text{beide zijden } -x^2 \\
 6x &= -9 && \text{beide zijden omwisselen en } -9 \\
 x &= -\frac{9}{6} = -1,5 && \text{beide zijden delen door 6}
 \end{aligned}$$

Controleer je oplossing door invullen. $x = -1,5$ geeft:

$$(-1,5)^2 = (-1,5 + 3)^2 \text{ en dus } 2,25 = 2,25.$$

Opgave 8

Bekijk hoe de vergelijking in **Voorbeeld 3** wordt opgelost.

- Waarom is terugrekenen nu niet mogelijk?
- Ga na of je nog weet hoe haakjes wegwerken ook alweer in zijn werk gaat. Werk de haakjes weg van $(x - 2)^2 - 9$.
- Waarom los je de vergelijking $(x - 2)^2 - 9 = 5$ niet op door eerst de haakjes weg te werken?
- Los de vergelijking uit c op door gebruik te maken van terugrekenen.

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen op met de balansmethode.

- $x^2 + 5 = (4 - x)^2$
- $2x^2 + 5 = 14 - x^2$
- $0,5x^2 = 6 + 0,5(x - 2)^2$

Opgave 10

Niet alle kwadratische vergelijkingen hebben oplossingen.

- Waarom heeft de vergelijking $(x + 4)^2 + 12 = 5$ geen oplossingen?
- Waarom heeft de vergelijking $(x + 4)^2 + 12 = 8x$ geen oplossingen?

Verwerken

Opgave 11

Bekijk de kwadratische formule $y = 0,5(x - 2)^2 + 3$.

- Bepaal de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool. Gaat het om een dal- of een bergparabool?
- Hoeveel nulpunten heeft deze parabool?
- Bereken in twee decimalen nauwkeurig de oplossing van de vergelijking: $0,5(x - 2)^2 + 3 = 7$.

Opgave 12

Los de volgende vergelijkingen op. Geef exacte antwoorden.

- a $(x + 15)^2 - 20 = 5$
- b $4 - 2x^2 = 0$
- c $2(x - 7)^2 + 15 = 21$
- d $6 + 5x^2 = 3x^2 + 18$
- e $8 - (x + 1)^2 = -8$
- f $-0,05(x - 20)^2 + 100 = 0$

Opgave 13

De baan van een afgeschoten vuurpijl wordt bij benadering gegeven door $h = 33,5 - 0,5(x - 8)^2$. Hierin is h de hoogte in meter boven de begane grond en x de afstand van de plek waar de pijl werd afgeschoten tot het punt op de grond dat recht onder de vuurpijl zit. De vuurpijl spat nadat hij op zijn hoogste punt is geweest op 30 m hoogte uit elkaar.

- a Op welke hoogte wordt de vuurpijl afgeschoten?
- b Hoe hoog komt de vuurpijl maximaal? En bij welke waarde van x is dat?
- c Bij welke waarde van x spat de vuurpijl uiteen? Geef je antwoord exact en in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 14

Los de vergelijkingen op. Geef exacte antwoorden.

- a $(x + 5)^2 = x^2$
- b $x^2 = 12x^2$
- c $(x - 4)^2 = (x - 5)^2$
- d $2x^2 + 5 = 1 - x^2$

Opgave 15

Een bioscoop heeft twee zalen met evenveel stoelen. In zaal I zijn er evenveel rijen stoelen als er stoelen in een rij zitten. In zaal II zijn er 8 rijen stoelen meer dan in zaal I, maar elke rij heeft 6 stoelen minder dan in zaal I. Hoeveel stoelen heeft elke zaal?

- a Stel hierbij een passende vergelijking op.
- b Los deze vergelijking op en geef antwoord op de vraag.

Opgave 16

Acapulco in Mexico is onder andere beroemd om zijn 'cliff divers'. Dat zijn mensen die vanaf hoge kliffen het water in duiken. Het verband tussen de hoogte boven het water h en het aantal meters vooruit m kun je weergeven met de formule:

$$h = 88 - 0,12m^2$$

- Als je een bijpassende grafiek tekent, wat stelt dan het nulpunt (snijpunt met de m -as) voor?
- Vanaf welke hoogte springt de duiker vanaf de klif?

Je wilt weten hoeveel meter de duiker in totaal vooruit springt tot de plaats waar hij het water raakt. Dat is nuttig omdat zo'n klif vaak niet echt loodrecht naar beneden gaat.

- Welke vergelijking moet je oplossen?
- Los die vergelijking op en bereken hoeveel meter de duiker vooruit springt. Geef je antwoord in meters.

Een andere duiker springt van een rots die 96 m hoog is en is op het moment dat hij het water raakt ongeveer 30 m vooruit gesprongen.

- Welke formule kun je voor zijn sprong opstellen als je ook nu van een kwadratisch verband tussen h en m uitgaat?



Figuur 8

Toepassen

Je ziet weer de beroemde hangbrug de Golden Gate Bridge in San Francisco. De rijbanen zijn met tuidraden opgehangen aan twee staalkabels die tussen de twee torens van de brug hangen. Die staalkabels (met een diameter van 92,7 cm) hangen in de vorm van een parabool.

De afstand tussen beide torens is 1280 m. En de afstand van het wegdek tot de bovenkant van de torens is ongeveer 152 m.

Neem aan dat het wegdek recht is. Kies je de y -as midden tussen de torens en de x -as op het wegdek, dan geldt voor de paraboolvorm van de staalkabels de formule:

$$y = \frac{149}{409600}x^2 + 3$$

Hierin is x de afstand tot het midden van de torens en y de hoogte van de staalkabel boven het wegdek, beide in meters.

Ga ervan uit dat de dikte van de staalkabels verwaarloosbaar is.



Figuur 9

Opgave 17: Golden Gate Bridge

Je ziet in **Toepassen** welke formule je kunt opstellen voor de staalkabels waaraan een brug als de Golden Gate Bridge hangt.

- Er zijn twee even lange tuidraden die 615 m uit elkaar aan de brug zijn bevestigd. Hoe lang zijn die tuidraden?
- Er zijn twee tuidraden die 111,2 m lang zijn. Hoe ver zitten die twee tuidraden uit elkaar aan de brug bevestigd? Bepaal het antwoord door een bijpassende vergelijking op te lossen.

Testen

Opgave 18

Los de volgende vergelijkingen op. Geef exacte antwoorden.

- a $(x + 12)^2 - 20 = 341$
- b $-0,02(x - 30)^2 + 100 = 0$
- c $(x + 8)^2 = x^2$
- d $3x^2 + 6 = 3 - x^2$

Opgave 19

Een vierkant parkeerterrein wordt verbouwd. In de lengte gaat een strook van 3 m breedte af en in de breedte komt een strook van 4 m breedte bij. De oppervlakte van het terrein blijft daardoor even groot.

Bereken de oppervlakte van het parkeerterrein.

- a Stel hierbij een passende vergelijking op.
- b Los de vergelijking op en geef antwoord op de vraag.

Opgave 20

Bekijk de kwadratische formule $y = -3,5(x + 1)^2 + 5$.

- a Bepaal de top van de bijbehorende parabool en geef aan of het een dal of bergparabool is.
- b Bereken exact de nulpunten van deze parabool.
- c Bekijk de vergelijking $-3,5(x + 1)^2 + 5 = a$. Voor welke waarde van a heeft deze vergelijking precies één oplossing?
- d Voor welke waarden van a heeft de vergelijking uit c geen oplossing?

Practicum

Een vergelijking van de vorm $a(x - p)^2 + q = r$ heet een **kwadratische vergelijking**. Zo'n vergelijking heeft soms twee, soms één en soms geen oplossingen.

De vergelijking $1,5(x - 1)^2 - 4 = 2$ bijvoorbeeld heeft als oplossing $x = -1 \vee x = 3$.

In deze applet kun je die oplossing controleren.

[Gebruik de applet.](#)



© 2025

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
