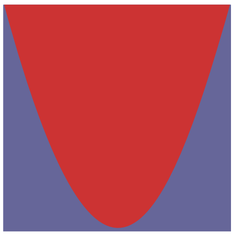
5.1 Kwadratische verbanden

Inleiding

Dit is een kenmerkende gebogen vorm. In sommige bouwwerken kom je dergelijke bogen tegen. Je spreekt van een parabool, van het Griekse παραβολή, wat ‘vergelijking’ betekent.

Ook in de sport kom je (bij benadering, vanwege de luchtweerstand) parabolen tegen in de banen van voorwerpen die worden geworpen, getrapt, of afgeschoten. Maar dan meestal ondersteboven...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- herkennen dat een formule van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ een kwadratisch verband beschrijft en daaruit de top en de vorm van grafiek van de bijbehorende parabool (berg- of dalparabool) afleiden;
- grafieken bij kwadratische verbanden tekenen en die gebruiken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen.

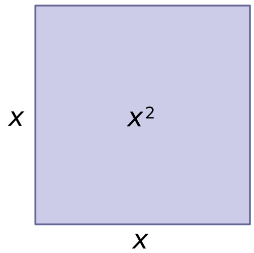
Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- formules en grafieken bij recht evenredige, lineaire, omgekeerd evenredige en hyperbolische verbanden maken en gebruiken;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode.

Verkennen

Opgave V1

Een voorbeeld van een kwadraat is de oppervlakte van een vierkant. Als de zijde een lengte x heeft, is de oppervlakte y gegeven door $y = x^2$.



Figuur 2

a Vul de volgende tabel in.

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

Tabel 1

b Stel je eens voor dat x ook negatief zou kunnen zijn. (Bij een vierkant gaat dat niet.) En vul nu deze tabel in.

x	-1	-2	-3	-4	-5	-6
y						

Tabel 2

c Teken een grafiek van y afhankelijk van x waarbij x loopt vanaf -4 tot en met 4. (Verbind de punten uit beide tabellen tot een vloeiende lijn.)

Hopelijk vraag je jezelf af waarom je hier niet gewoon de punten uit de tabel door (rechte) lijnstukjes met elkaar verbindt.

d Welke waarde heeft y als $x = 2{,}5$ volgens de formule? En welke waarde zou dat zijn als je de grafiek uit (rechte) lijnstukjes laat bestaan?

Opgave V2

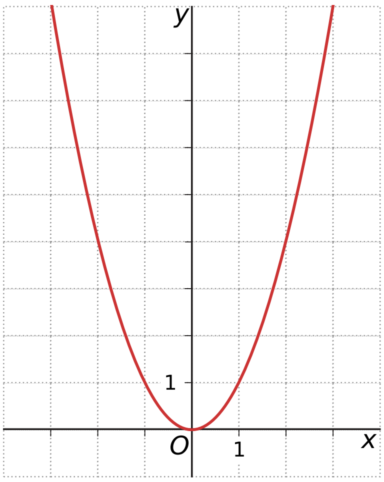
Hier zie je een grafiek bij de formule $y = x^2$.

a Je ziet maar een klein deel van de grafiek. Waarom is dat? Kun je ooit de hele grafiek zien?

b Kunnen de uitkomsten, de y-waarden, elke waarde aannemen?

c Voor welke waarden van x geldt $y = 9$?

d Voor welke exacte waarden van x geldt $y = 10$?

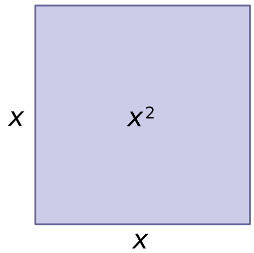


Figuur 3

Uitleg 1

De oppervlakte van een vierkant is een kwadraat. Als de zijde van het vierkant een lengte x heeft, is de oppervlakte y gegeven door $y = x^2$.

Stel je voor dat x zowel positief als negatief kan zijn. (Bij een vierkant kan dat niet, want lengte en breedte kunnen niet negatief zijn). Je kunt dan deze tabel maken:



Figuur 4

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

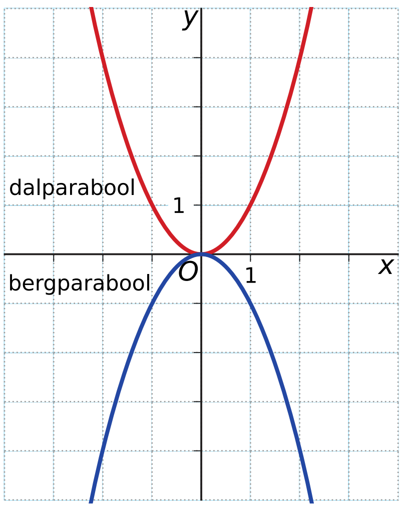
Tabel 3

De formule $y = x^2$ beschrijft een kwadratisch verband.
De grafiek bij deze formule zie je in de figuur. Het is de rode lijn. Je noemt dit een dalparabool. Elke parabool heeft een top. In dit geval is de top het laagste punt (0,0).

De formule $y = -x^2$ beschrijft ook een kwadratisch verband.
Als je de waarden $x = -3$ tot en met $x = 3$ invult, krijg je:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

Tabel 4



Figuur 5

De grafiek bij de formule $y = -x^2$ is blauw getekend. Het is een bergparabool. In dit geval is de top het hoogste punt (0,0).

Deze dal- en bergparabool hebben beide de verticale as als symmetrieas. Voor deze symmetrieas geldt $x = 0$.

Misschien vraag je je af waarom de punten uit de twee tabellen niet door (rechte) lijnstukjes met elkaar verbonden zijn. Wel, neem $y = x^2$. Bij $x = 2{,}5$ vind je dan $y = 2{,}5^2 = 6{,}25$. Trek je een lijnstukje tussen (2,4) en (3,9), dan gaat dat bij $x = 2{,}5$ door het punt (2,5; 6,5). Dat klopt niet met de waarde die je met de formule hebt uitgerekend. Als je meer punten uitrekent, zie je dat je echt de getekende figuur krijgt.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**. Neem nu de formule $y = 2 \cdot x^2$ hebt.

a Vul de volgende tabel in:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

Tabel 5

b Teken de grafiek bij deze formule. Is er verschil met de rode grafiek in de uitleg?

c De grafiek is lijnsymmetrisch. Welke lijn is de symmetrieas?

d Welk punt is de top van deze parabool?

Opgave 2

Ga uit van de formule $y = x^2$ in **Uitleg 1**. Gebruik de tabel erbij.

a Teken de grafiek van $y = (x-3)^2$. Hoe pas je de tabel in de uitleg aan? Wat is er aan deze grafiek anders dan aan die bij vraag a? Wat wordt bijvoorbeeld de top van deze grafiek?

b Teken nu de grafiek van $y_3 = 0{,}5 \cdot (x-3)^2$. Hoe pas je de tabel bij a aan? Wat is er aan deze grafiek anders dan aan die bij a?

c Teken tenslotte de grafiek van $y = 0{,}5 \cdot (x-3)^2 + 1$. Hoe pas je de tabel bij b aan? Wat is er aan deze grafiek anders dan aan die bij b?

Je ziet dat de grafiek van $y = 0{,}5 \cdot (x-3)^2 + 1$ uit die van $y = x^2$ kan ontstaan door verschuiven en door uitkomsten met een bepaald getal te vermenigvuldigen. Vandaar dat beide grafieken dezelfde vorm hebben: de paraboolvorm.

d Welke verschuivingen moet je toepassen en met welk getal moet je uitkomsten vermenigvuldigen? En in welke volgorde moet dit allemaal gebeuren?

Uitleg 2

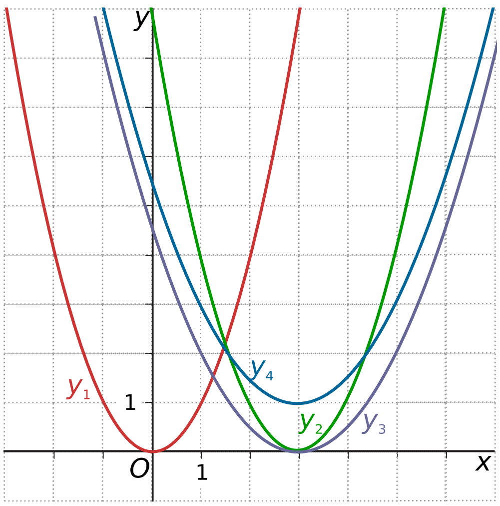
Bekijk de applet

In de figuur zie je $y_1 = x^2$.
Als je deze grafiek 3 opschuift naar rechts, evenwijdig aan de x-as, dan krijg je de grafiek

$y_2 = (x-3)^2$.
Als je de uitkomsten daarna vermenigvuldigt met 0,5, krijg je de grafiek

$y_3 = 0{,}5 \cdot (x-3)^2$.
Wanneer je ten slotte de grafiek evenwijdig aan de y-as nog 1 omhoog schuift, krijg je de grafiek

$y_4 = 0{,}5 \cdot (x-3)^2 + 1$.



Figuur 6

Opgave 3

In **Uitleg 2** zie je dat grafieken van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ dezelfde vorm hebben.

Deze grafieken kunnen allemaal ontstaan uit die van $y = x^2$. Je verschuift eerst evenwijdig aan de x-as, dan vermenigvuldig je alle uitkomsten met hetzelfde getal en ten slotte verschuif je evenwijdig aan de y-as.

a Neem $a = 2$ en $p = 1$ en $q = -3$. Welke formule krijg je dan? Welke verschuivingen en vermenigvuldiging moet je op de grafiek van $y = x^2$ toepassen om de nieuwe grafiek te krijgen?

b Neem $a = 0{,}5$ en $p = 1$ en $q = 3$. Welke formule krijg je dan? Welke verschuivingen en vermenigvuldiging moet je op de grafiek van $y = x^2$ toepassen om de nieuwe grafiek te krijgen?

c Neem $a = -1$ en $p = 2$ en $q = 4$. Welke formule krijg je dan? Welke verschuivingen en vermenigvuldiging moet je op de grafiek van $y = x^2$ toepassen om de nieuwe grafiek te krijgen?

Opgave 4

De formule $y = -0{,}5(x - 5)^2 + 8$ beschrijft een kwadratisch verband.

a Hoe kan de grafiek bij deze formule ontstaan uit die van $y = x^2$?

b Welke lijn is de symmetrieas van de bijbehorende parabool?

c Welk punt is de top van de parabool?

d Door de parabool te tekenen kun je de snijpunten van de parabool met de twee assen van het assenstelsel vinden. Bepaal die punten.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

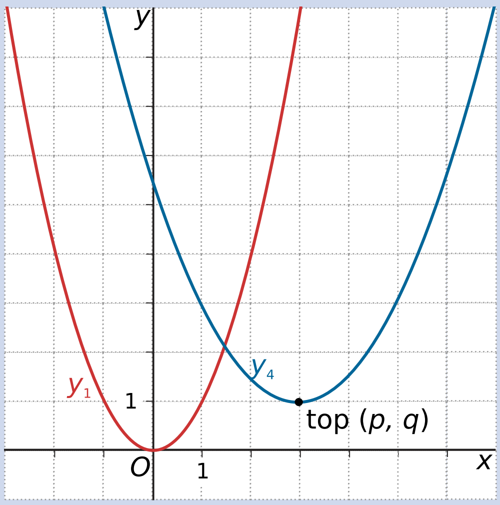
Bekijk de applet

In het algemeen beschrijft een formule van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ een kwadratisch verband en is de bijbehorende grafiek een **parabool** met **top** (p,q). De waarde van a bepaalt of er sprake is van een bergparabool of een dalparabool: als $a > 0$ dan is de grafiek een **dalparabool**, als $a < 0$ dan is de grafiek een **bergparabool**.

Deze formule heet een **kwadratisch verband**, omdat de onbekende x wordt gekwadrateerd.

Alle grafieken van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ kunnen ontstaan uit die van $y = x^2$.

Daarvoor moet de grafiek eerst p horizontaal (evenwijdig aan de x-as) verschuiven, daarna moeten de uitkomsten allemaal met a vermenigvuldigd worden en ten slotte wordt de grafiek q omhoog (evenwijdig aan de y-as) verschoven.

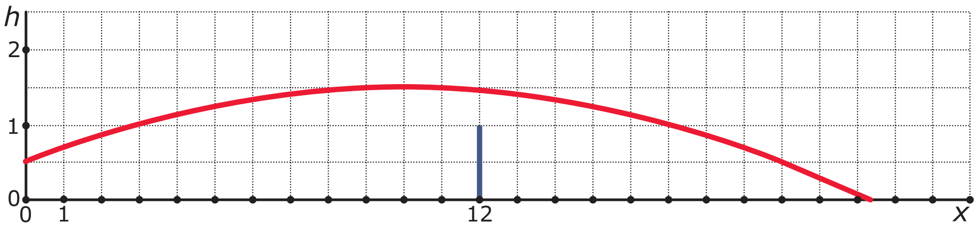


Figuur 7

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: tennisbal

Een tennisser is aan het trainen. Op de baseline tegenover hem schiet een tenniskanon met grote snelheid een bal op hem af, precies over de lengte van het veld. Het tennisveld is 24 m lang en het net is 1 m hoog.



Figuur 8

De baan van de bal is een kromme lijn. In het getekende assenstelsel geldt voor die baan de formule $h = -0{,}01 \cdot (x - 10)^2 + 1{,}5$. Hierin is x de horizontale afstand die de bal heeft afgelegd ten opzichte van het tenniskanon en h de hoogte van de tennisbal, beide in meter.

Waar zit de bal hoger dan 1 m boven de grond?

Antwoord

Je maakt dan eerst een tabel met geschikte waarden voor x. Bij elke waarde van x reken je de bijpassende waarde voor h uit, bijvoorbeeld:

- $x = 0$ geeft $h = -0{,}01 \cdot (0 - 10)^2 + 1{,}5 = -0{,}01 \cdot 100 + 1{,}5 = 0{,}5$
- $x = 2$ geeft $h = -0{,}01 \cdot (2 - 10)^2 + 1{,}5 = -0{,}01 \cdot 64 + 1{,}5 = 0{,}86$

Zo krijg je een tabel en kun je de grafiek tekenen.

Teken in de grafiek van h een lijn op hoogte van $h = 1$.

Je ziet dat beide grafieken elkaar op twee plaatsen snijden. De x-coördinaten van deze snijpunten zijn de oplossingen van deze vergelijking.

Ga na dat de oplossingen zijn: $x \approx 3$ en $x \approx 17$.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**. Je ziet een formule voor de baan die een tennisbal onder bepaalde omstandigheden aflegt.

a Neem de tabel over en vul de tabel voor de gegeven formule in.

x	-4	0	4	8	10	12	16	20	24
h									

Tabel 6

b Teken nu zelf de grafiek bij deze formule. Teken ook de lijn $h = 1$ en ga na, dat de bal inderdaad op 1 m hoogte zit als $x \approx 3$ en $x \approx 17$.

c De grafiek is lijnsymmetrisch. Welke lijn is de symmetrieas?

d Welk punt is de top van deze parabool?

e Laat zien dat uit de tabel volgt dat de bal inderdaad over het net gaat.

f Bepaal met behulp van inklemmen in één decimaal nauwkeurig op welke afstand van het tenniskanon de bal op de grond komt.

Opgave 6

Gegeven is de kwadratische formule $y = 2 \cdot (x - 1)^2 - 4$.

Gebruik eventueel de applet in het **Practicum**.

a Neem de tabel over en vul in. Teken een grafiek bij de gegeven formule.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y							

Tabel 7

b Welke symmetrieas heeft de parabool die je bij a hebt getekend? Welk punt is de top?

c Los met behulp van de grafiek de vergelijking $2 \cdot (x - 1)^2 - 4 = 0$ op in één decimaal nauwkeurig. Controleer je oplossingen door invullen.

Voorbeeld 2

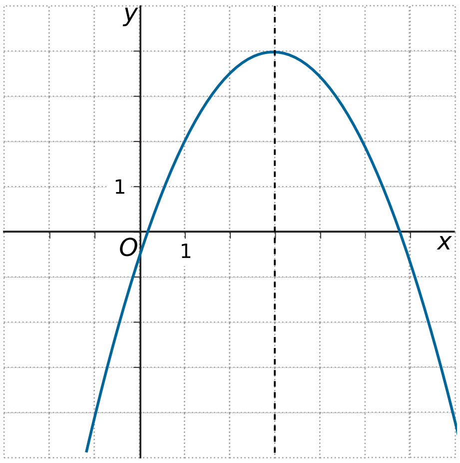
Bij de formule $y = -0{,}5 \cdot (x - 3)^2 + 4$ kun je zelf een grafiek tekenen.

Je maakt eerst een tabel met geschikte waarden voor x.
Maar hoe weet je vooraf welke waarden van x geschikt zijn om in te vullen?

Antwoord

Bedenk eerst dat het een bergparabool wordt.
De top van die bergparabool lees je uit de formule af: top $(3,4)$.
De lijn met $x = 3$ is de symmetrieas van de parabool.

Voor je tabel kies je daarom x-waarden links en rechts van $x = 3$.



Figuur 9

Je maakt dus zo'n tabel en vult hem in. Daarmee teken je de grafiek.

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	-4	-0,5	2	3,5	4	3,5	2	-0,5	-4

Tabel 8

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je aan de kwadratische formule kunt zien welke top de bijbehorende parabool heeft. Dat is nuttig als je een geschikte tabel wilt maken om de parabool te kunnen tekenen.

a Gebruik de formule uit het voorbeeld. Waaraan zie je dat de grafiek een bergparabool wordt?

b Hoe lees je de coördinaten van de top van die parabool uit de formule af?

Opgave 8

Bepaal bij de volgende kwadratische formules of de grafiek een dal- of een bergparabool is en bepaal de top.

a $y = 0{,}5 \cdot (x + 2)^2 - 1$

b $y = (x - 4)^2 + 1$

c $y = 3x^2 + 4$

d $y = 4 - x^2$

Voorbeeld 3

De formule $y_1 = 0{,}5(x - 1)^2 - 1$ beschrijft een kwadratisch verband, de formule $y_2 = 2x + 3$ een lineair verband. Bij de eerste formule hoort een parabool als grafiek, bij de tweede een rechte lijn.

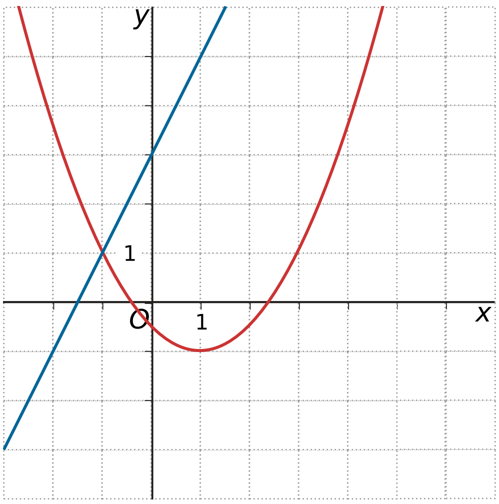
Je wilt de vergelijking $0{,}5(x - 1)^2 - 1 = 2x + 3$ oplossen. Hoe doe je dat?

Antwoord

Je tekent beide grafieken in één assenstelsel. Maak een tabel.

Je ziet duidelijk een snijpunt, namelijk (-1,1).
Je kunt zien dat er waarschijnlijk nog een snijpunt is. Dus moet je de grafieken uitbreiden. Je breidt daartoe eerst je tabel uit.

Ga zelf na dat het andere snijpunt (7,17) is. Dat kun je doen door de grafiek uit te breiden, maar ook door het snijpunt in beide vergelijkingen in te vullen.
De gevraagde vergelijking heeft twee oplossingen, namelijk $x = -1$ en $x = 7$. Beide waarden voor x maken de vergelijking kloppend.



Figuur 10

Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 3** hoe de vergelijking $0{,}5(x - 1)^2 - 1 = 2x + 3$ wordt opgelost.

a Maak een tabel zoals deze en teken zelf de grafiek van y_1. Teken ook de rechte lijn die de grafiek van y_2 voorstelt in je figuur.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y_1									

Tabel 9

b Breid de tabel en de grafiek uit totdat je ook het tweede snijpunt ziet.

c Je hebt nu gezien dat de gegeven vergelijking twee oplossingen heeft. Laat zien dat beide oplossingen de vergelijking waar maken.

Opgave 10

Je wilt de vergelijking $x^2 = 5 - x$ oplossen.

a Teken de bijpassende grafiek en ga na, dat er twee snijpunten zijn.

b Lees uit de grafiek de twee snijpunten af, op één decimaal nauwkeurig. Welke oplossingen heeft de vergelijking?

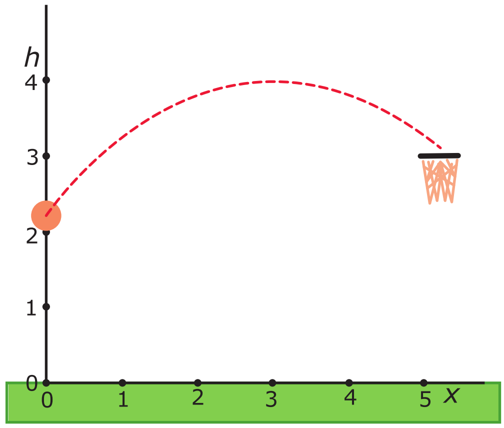
c Waarom kun je nu je antwoord niet precies controleren?

Verwerken

Opgave 11

Een basketballer gooit de bal precies in de basket. De baan van het middelpunt van de bal is (bij benadering) een deel van een parabool.

Je ziet in de figuur dit deel van de parabool in een assenstelsel. Zowel x als h worden in meter uitgedrukt. Bij de parabool hoort de formule: $h = -0{,}2 \cdot (x - 3)^2 + 4$



Figuur 11

a Op het moment dat de speler de bal loslaat, is $x = 0$. Je kunt in de figuur de hoogte die daarbij hoort schatten. Bereken met behulp van de formule de precieze hoogte waarop de bal wordt losgelaten. Het gaat daarbij om het middelpunt van de bal.

b Bereken de coördinaten van het hoogste punt van de parabool.

c Teken nu zelf de baan van (het middelpunt van) de bal. Maak eerst een geschikte tabel. De ring van de basket hangt op 3 m boven de grond. De speler scoort, want het middelpunt van de bal gaat door het midden van deze ring. Laat de baan stoppen bij het middelpunt van de ring.

d Op hoeveel meter voor de basket laat deze speler de bal los?

Opgave 12

Je ziet een aantal kwadratische formules.

Geef bij elke formule:

- de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool;
- de symmetrieas;
- of het een dalparabool of een bergparabool is;
- hoe de grafiek ontstaat uit die van $y = x^2$.

a $y = (x - 6)^2 + 1$

b $y = -2(x + 1)^2$

c $y = 100 - 0{,}01(x - 10)^2$

d $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$

Opgave 13

Een vuistregel voor de remweg van een motor is $R = \frac{v^2}{16}$. Hierin is R de remweg in m en v de rijsnelheid in m/s.

a Boris rijdt op een motor met een snelheid van 90 km/uur. Hoe lang is zijn remweg?

b Teken een grafiek bij deze formule. Maak eerst een tabel met voor v de waarden 0, 10, 40.

c Even later moet Boris remmen, zijn remweg is 65 m. Je wilt weten hoe hoog zijn snelheid was. Welke vergelijking moet je dan oplossen?

d Los de in c bedoelde vergelijking op met behulp van de grafiek. Hoe hoog was Boris' snelheid in km/uur?

e Je kunt de in c bedoelde vergelijking ook oplossen zonder de grafiek te gebruiken. Laat zien hoe.

Opgave 14

Bekijk de formule $y = 0{,}5(x + 1{,}5)^2 - 3$.

a Er bestaat een kwadratisch verband tussen x en y. Waaraan zie je dat?

b Maak een geschikte tabel en teken de grafiek die bij deze formule hoort. Hoe heet zo'n grafiek?

c Welke symmetrieas heeft de grafiek?

d Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $0{,}5(x + 1{,}5)^2 - 3 = 1{,}5$? Bepaal de oplossing(en) met behulp van je grafiek.

e Controleer de oplossing(en).

f Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $0{,}5(x + 1{,}5)^2 - 3 = -5$?

Opgave 15

Je wilt de vergelijking $(x - 2)^2 = 7{,}25 - 1{,}75x$ oplossen.

a Teken een grafiek waaruit je de oplossing(en) kunt aflezen.

b Bepaal de oplossing(en) van de gegeven vergelijking.

c Controleer je antwoord door invullen.

Opgave 16

Een bergparabool heeft in een xy-assenstelsel het punt (4,10) als top en gaat door het punt (0,6).

Stel voor deze parabool een formule op.

Toepassen

Een beroemde hangbrug is de **Golden Gate Bridge** in San Francisco. De rijbanen zijn met tuidraden opgehangen aan twee staalkabels die tussen de twee torens van de brug hangen. Die staalkabels (met een diameter van 92,7 cm) hangen in de vorm van een parabool.

De afstand tussen beide torens bedraagt 1280 m en de staalkabels zijn ongeveer 152 m boven het wegdek bevestigd. Neem aan dat het wegdek recht is. Kies je de y-as midden tussen de torens en de x-as op het wegdek, dan geldt voor de paraboolvorm van de staalkabels de formule

$$y = \frac{149}{409600}x^2 + 3$$

Figuur 12

Hierin is x in m en y de hoogte van de staalkabel boven de x-as.

Opgave 17: Golden Gate Bridge

Je ziet in **Toepassen** welke formule je kunt opstellen voor de staalkabels waaraan een brug als de Golden Gate Bridge hangt.

Ga er in deze opgave van uit dat de dikte van de staalkabels verwaarloosbaar is.

a Laat door berekening zien dat de hoogte waarop de staalkabels zijn opgehangen volgens de formule inderdaad 152 m boven het wegdek is.

b Hoe hoog boven de x-as zit het laagste punt van deze kabel?

Je kunt nu met behulp van de formule voor de parabool de lengtes berekenen van alle tuidraden van één staalkabel tussen beide torens. Deze 84 tuidraden zitten op 15 m afstand van elkaar aan het wegdek vast. De dikte van deze tuidraden wordt buiten beschouwing gelaten. De twee kortste tuidraden zijn even lang.

c Bereken de lengte van de twee kortste tuidraden in het midden in twee decimalen nauwkeurig.

d Bereken de lengte van de twee langste tuidraden in m nauwkeurig.

Opgave 18: Eerste en tweede verandering

Bij een lineair verband zie je per eenheid waarmee de x-waarde oploopt ook de y-waarde met steeds hetzelfde getal groter of kleiner worden: er is een constante verandering per eenheid (de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende lijn).

a Vul bij de lineaire formule $y = 2x + 5$ deze tabel in en ga na dat de verandering constant is.

x	-1	0	1	2	3	4	5
y							
verandering							

Tabel 10

Bij een kwadratisch verband moet je naar de verandering der veranderingen kijken om net zo'n regelmaat te vinden. Je noemt dit wel de tweede verandering. Bij elk kwadratisch verband is de tweede verandering constant.

b Vul bij de kwadratische formule $y = 2x^2 + 5$ deze tabel in en ga na dat de verandering der veranderingen constant is.

x	-1	0	1	2	3	4	5
y							
verandering							
tweede verandering							

Tabel 11

c Ga nu met behulp van de tweede verandering na dat $y = (x + 2)(x - 3)$ een kwadratisch verband beschrijft.

Testen

Opgave 19

Gegeven is de formule $y = 0{,}5(x - 3)^2 + 4$

a Geef bij deze formule:

- de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool
- de symmetrieas
- of het een dalparabool of een bergparabool is
- hoe de grafiek ontstaat uit die van $y = x^2$

b Je wilt de vergelijking $0{,}5(x - 3)^2 + 4 = 6$ oplossen.

Lees de oplossing(en) uit een bijpassende grafiek af.

c Je wilt de vergelijking $0{,}5(x - 3)^2 + 4 = 5$ oplossen.

Lees de oplossing(en) zo goed mogelijk uit de grafiek af.

Practicum

Bedenk een kwadratisch verband zoals $y = -0{,}5(x - 3)^2 + 4$.
Bepaal eerst zelf de top en de symmetrieas en maak een goede tabel en grafiek. Controleer met de applet.

Gebruik de applet.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.