

## 4.5 Hyperbolische verbanden

### Inleiding

Hoe sneller je loopt, fietst, of rijdt, hoe minder tijd je nodig hebt om een bepaalde afstand af te leggen. Vaak is er sprake van een omgekeerd evenredig verband. Maar wat als er een tussenstop is? Je gaat nu kennismaken met hyperbolische verbanden.



Figuur 1

### Je leert in dit onderwerp

- formules en grafieken bij hyperbolische verbanden maken en gebruiken;
- vergelijkingen oplossen waarin hyperbolische verbanden voorkomen.

### Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- recht evenredige, lineaire en omgekeerd evenredige verbanden herkennen en het hellingsgetal, de richtingscoëfficiënt, bepalen;
- formules en grafieken bij recht evenredige, lineaire en omgekeerd evenredige verbanden maken en gebruiken;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode.

### Verkennen

#### Opgave V1

Je rijdt met de auto 16 km over de snelweg. Je hebt een constante (gemiddelde) snelheid. Maar je moet onderweg wel even stoppen om te tanken en dat kost 5 minuten.

- Als je 16 km met 120 km/uur rijdt, hoe lang doe je daar dan over? Geef je antwoord eerst in uren en dan in minuten.
- Als je 16 km met 60 km/uur rijdt, hoe lang doe je daar dan over? Geef je antwoord eerst in uren en dan in minuten.

Noem de snelheid in km/uur  $v$  en de reistijd in uren  $t$ .

- Waarom is hier geen sprake van een omgekeerd evenredig verband?
- Welke formule geeft het verband tussen  $t$  en  $v$  weer?

## Uitleg

Je rijdt weer op de Afsluitdijk, die 32 km lang is. Je stapt dit keer onderweg 5 minuten uit om van het uitzicht te genieten. Bereken je nu de reistijd bij verdubbeling van de snelheid, zie je het volgende:

- Bij een snelheid van 120 km/h ben je  $\frac{32}{120} \cdot 60 + 5 = 21$  minuten onderweg.
- Bij een snelheid van 60 km/h ben je  $\frac{32}{60} \cdot 60 + 5 = 37$  minuten onderweg.

Nu betekent verdubbeling van de snelheid geen halvering van de reistijd. Snelheid en reistijd zijn niet omgekeerd evenredig.

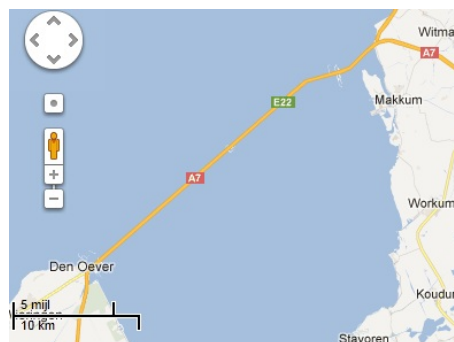
Je ziet dat je de reistijd  $t$  in minuten kunt berekenen door de afstand van 32 km te delen door de snelheid  $v$  (km/h), met 60 te vermenigvuldigen en ten slotte nog 5 bij de uitkomst op te tellen:

$$t = \frac{32}{v} \cdot 60 + 5 = \frac{1920}{v} + 5$$

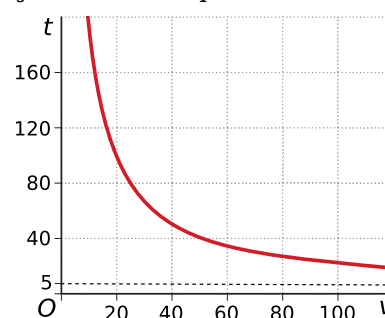
Je spreekt van een hyperbolisch verband.

Voor snelheden dicht bij 0 wordt de reistijd heel erg groot. Voor hele grote snelheden komt de reistijd in de buurt van de 5 minuten.

De grafiek nadert naar de  $y$ -as (de verticale asymptoot) en naar de horizontale lijn  $t = 5$  (de horizontale asymptoot).



Figuur 2



Figuur 3

### Opgave 1

Je rijdt 32 km over de snelweg en je stopt onderweg 5 minuten om te tanken.

- Hoeveel minuten doe je over deze 32 km als je 80 km/h rijdt?
- Hoeveel minuten doe je daarover als je 40 km/h rijdt?
- Leg met behulp van je antwoorden bij a en b uit waarom nu de reistijd  $t$  en de constante snelheid  $v$  niet omgekeerd evenredig zijn.
- Teken een grafiek van  $t = \frac{1920}{v} + 5$ . Maak eerst een tabel met voor  $v$  de waarden 10, 20, ..., 120.
- Wat betekent het voor de reistijd als je snelheid bijna 0 wordt? Wat betekent dit voor de grafiek?
- Wat betekent het voor de reistijd als je snelheid heel groot wordt? Wat betekent dit voor de grafiek?

### Opgave 2

Elk hyperbolisch verband heeft de vorm  $y = \frac{c}{x} + d$  waarin  $c$  en  $d$  constanten zijn. Je kunt deze constanten aanpassen en bijpassende grafieken maken. Gebruik eventueel de applet in het **Practicum**.

- Neem  $c = 1$  en  $d = 2$ . De grafiek gaat door de punten (1,3), (2;2,5) en (0,5;4). Laat zien dat deze punten ook aan de formule voldoen.
- Welke waarde heeft  $y$  als  $x = 100$ ?  
En als  $x = 100000$ ?
- Welke waarde heeft  $y$  als  $x = 0,01$ ?  
En welke als  $x = 0,00001$ ?

Voor verschillende waarden van  $c$  en  $d$  krijg je verschillende grafieken. Het zijn allemaal hyperbolen. Neem  $d = 2$ .

- Bij welke waarde van  $c$  gaat die hyperbool door het punt (2,3)?

- e Waarom hebben al deze grafieken geen punt met  $x = 0$ ? Geldt dit ook voor andere waarden van  $d$ ?  
Neem nu  $c = 1$ .
- f Wat gebeurt er met de grafiek als  $d$  verandert?

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

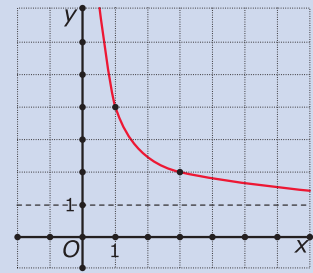
#### Bekijk de applet: grafiek hyperbolisch verband

Tussen twee variabelen  $x$  en  $y$  bestaat een **hyperbolisch verband** als er een formule van de vorm  $y = \frac{c}{x} + d$  met  $c$  en  $d$  constant bij hoort.

De grafiek van zo'n hyperbolisch verband is een **hyperbool**.

De grafiek benadert twee lijnen steeds dichtter zonder ze ooit te snijden: de  $y$ -as en de lijn  $y = d$ . Dergelijke lijnen noem je **asymptoten**:

- De  $y$ -as is de **verticale asymptoot** van de grafiek.
- De lijn  $y = d$  is de **horizontale asymptoot** van de grafiek.



Figuur 4

### Voorbeeld 1

Voor het laten drukken van folders betaal je een vast bedrag van € 10,00 en daarbovenop € 0,04 per folder. De kosten per folder zijn daarom hoog als je maar weinig folders laat drukken.

Noem het aantal folders dat je wilt laten drukken  $a$  en de kosten per folder  $k$ . Maak een bijpassende formule van  $k$  afhankelijk van  $a$  en teken de grafiek. Je wilt niet meer dan € 0,06 per folder betalen. Hoeveel folders  $a$  moet je dan laten drukken?

Antwoord

Per folder betaal je in ieder geval € 0,04. Verder betaal je per folder  $\frac{10}{a}$  euro.

In totaal dus  $k = 0,04 + \frac{10}{a}$  euro per folder.

Om een goede bijpassende grafiek te maken moet je bedenken dat je veel folders wilt laten maken om de kosten per folder laag te houden. Misschien wel zo'n 1000 stuks.  $a$  komt op de horizontale as en laat je daarom bijvoorbeeld lopen vanaf 0 tot en met 1000. Voor 1000 folders betaal je € 0,05 per stuk, maar voor 100 folders betaal je € 0,14 per stuk. Maak zelf een goede tabel en grafiek.

Je moet vervolgens oplossen  $0,04 + \frac{10}{a} = 0,06$ . Dat kun je doen met behulp van de grafiek en inklemmen, maar je kunt ook de balansmethode toepassen. Daarna los je de hyperbolische ongelijkheid  $0,04 + \frac{10}{a} > 0,06$  op.

### Opgave 3

Bekijk welk probleem er in **Voorbeeld 1** aan de orde wordt gesteld.

- a Van welk soort verband is er sprake?
- b Maak een tabel (in drie decimalen nauwkeurig) en een grafiek bij deze formule.
- c Je wilt weten bij welk aantal folders  $a$  geldt  $k < 0,06$ . Welke waarde voor  $a$  levert precies 0,06 op? En wat wordt dus je antwoord?

In het voorbeeld staat dat je het antwoord op d ook kunt vinden door te redeneren.

- d Leg uit hoe je dan de vergelijking  $0,04 + \frac{10}{a} = 0,06$  oplost.

### Opgave 4

Bij de productie van verf is er sprake van productiekosten per liter, maar ook van vaste kosten (machine, bedrijfshal, enzovoort) die niet van het geproduceerde aantal liter verf afhangen. Bij het berekenen van de prijs die de fabrikant per liter verf gaat berekenen moet hij ook met deze vaste kosten rekening houden. Neem aan dat die vaste kosten € 32000,00 bedragen. De productiekosten per liter bedragen € 5,60.

- Stel een formule op voor de totale kosten per liter ( $K$  in euro/liter) afhankelijk van het aantal geproduceerde liters  $a$ .
- Bereken hiermee de totale kosten per liter bij een productie van 10000 liter van deze verf.
- Bij welke waarde van  $a$  worden de totale kosten per liter kleiner dan € 6,00?

### Voorbeeld 2

Wanneer je een auto huurt, betaal je een vast bedrag van € 40,00 en daarbovenop € 0,60 per gereden kilometer.

Noem je het aantal gereden kilometers  $q$  en de kosten per kilometer  $k$ , dan geldt:  $k = 0,60 + \frac{40}{q}$

Bereken voor welke waarde van  $q$  de kosten per gereden kilometer € 1,13 bedragen.

Antwoord

Je moet de volgende vergelijking oplossen:  $0,60 + \frac{40}{q} = 1,13$

$$0,60 + \frac{40}{q} = 1,13$$

$$\frac{40}{q} = 0,53$$

$$q = \frac{40}{0,53}$$

$$q \approx 75,47$$

Dus bij 75,47 gereden kilometers bedragen de kosten € 1,13 per kilometer.

### Opgave 5

Wanneer je een auto huurt betaal je een vast bedrag van € 55,00 en daar bovenop € 0,45 per gereden kilometer.

- Stel een formule op voor de totale kosten per kilometer ( $k$  in euro/km) afhankelijk van het aantal gereden kilometer  $q$ .
- Bereken voor welke waarde van  $q$  de kosten per gereden kilometer € 0,98 bedragen.

### Opgave 6

Los de vergelijkingen op.

$$\mathbf{a} \quad \frac{600}{x} + 10 = 22$$

$$\mathbf{b} \quad \frac{180}{k} = 4,5$$

$$\mathbf{c} \quad 4 + \frac{4400}{x-20} = 15$$

$$\mathbf{d} \quad \frac{2p-50}{1500} - 0,4 = 0,1$$

### Opgave 7

Je wilt de ongelijkheid  $\frac{960}{v} + 5 < 17$  oplossen.

- Maak eerst een schets van de grafiek van  $y = \frac{960}{v} + 5$  en geef daarin aan hoe je de waarde van  $v$  kunt vinden waarvoor geldt  $y = 17$ .
- Bereken de waarde van  $v$  waarvoor geldt  $\frac{960}{v} + 5 = 17$ .
- Lees uit je schets de oplossing van de ongelijkheid af.

## Verwerken

### Opgave 8

Op veel scholen kun je ook als leerling kopieën maken. De maandelijkse kosten voor de school zijn:

- de huur en het onderhoud van de kopieermachine: € 150,00
- de kosten per kopie: € 0,02

Noem de maandelijkse kosten per kopie  $K$  en het aantal kopieën  $a$ .

- Welke formule geldt voor  $K$  afhankelijk van  $a$ ?
- Waarom zijn  $K$  en  $a$  niet omgekeerd evenredig?
- Teken een grafiek bij deze formule.
- Stel dat je als leerling € 0,05 per kopie betaalt. Hoeveel kopieën moeten er dan maandelijks minstens worden gemaakt als de school geen verlies wil draaien? Los de bijbehorende ongelijkheid systematisch op.

### Opgave 9

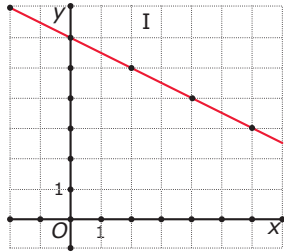
Los de volgende vergelijkingen op:

- $\frac{2400}{x} + 3,6 = 6,8$
- $200 + \frac{50}{x} = 450$
- $\frac{t-15}{300} - 0,5 = 0,8$
- $\frac{800}{d-5} = 50$

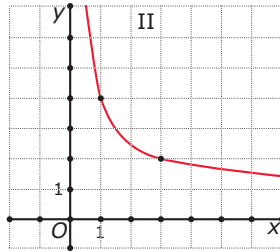
### Opgave 10

Je ziet grafieken bij vier formules.

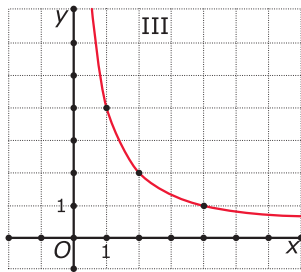
- $y_1 = \frac{4}{x}$
- $y_2 = 6 - 0,5x$
- $y_3 = \frac{3}{x} + 1$
- $y_4 = 0,2x + 4$



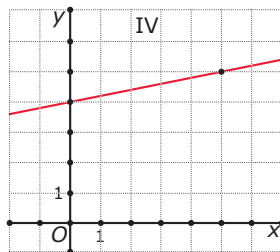
grafiek I



grafiek II



grafiek III



grafiek IV

**Figuur 5**

Welke formule hoort bij welke grafiek?

### Opgave 11

Je wilt de vergelijking  $\frac{4}{x} + 2 = x + 1$  oplossen. Een vergelijking zoals deze kun je op dit moment alleen grafisch en met inklemmen oplossen.

- a Teken de grafieken van  $y_1 = \frac{4}{x} + 2$  en  $y_2 = x + 1$  in één figuur. Houd ook rekening met negatieve waarden van  $x$ .
- b Aan de grafieken zie je dat er twee snijpunten zijn. Bereken de coördinaten van die snijpunten door inklemmen in één decimaal nauwkeurig.
- c Schrijf de oplossingen van deze vergelijking op in één decimaal nauwkeurig.
- d Schrijf de oplossingen van de ongelijkheid  $\frac{4}{x} + 2 > x + 1$  op in één decimaal nauwkeurig.

### Opgave 12

Los de vergelijkingen op.

- a  $2 - \frac{4}{x} = 8$
- b  $\frac{80}{2 - 0,5x} = 10$
- c  $5 + \frac{25}{x^2} = 6$
- d  $\frac{20}{-0,25x} = 10$

### Opgave 13

Bij een hyperbolisch verband tussen  $x$  en  $y$  hoort een formule van de vorm  $y = \frac{c}{x} + d$ . Hierin zijn  $c$  en  $d$  constanten.

- Bereken de waarde van  $y$  die hoort bij  $x = 10$  als de grafiek bij dit hyperbolische verband als horizontale asymptoot  $y = 5$  heeft en door het punt  $(2,7)$  gaat.
- Bereken de waarde van  $y$  die hoort bij  $x = 10$  als de grafiek bij dit hyperbolische verband door de punten  $(2,9)$  en  $(4,8)$  gaat.

### Toepassen

De standaard vergoeding voor kilometers die je voor een werkgever rijdt in de eigen auto bedraagt € 0,19 cent per kilometer. Een automobilist die voor zijn baas af en toe een ritje maakt is natuurlijk nieuwsgierig of daarmee inderdaad de kosten zijn gedekt. Het mooiste is als je dit voor een werkelijke situatie kunt narekenen, misschien heb je in je familie of kennissenkring wel iemand die in zo'n situatie zit. En anders kun je met de gegevens hieronder rekenen.

Voor een bepaalde auto die op benzine rijdt worden de volgende schattingen gedaan:

- De prijs van een liter benzine is € 1,68 en je rijdt 12 km op elke liter benzine.
- De wegenbelasting is € 300,00 per jaar.
- De verzekering kost € 200,00 per jaar.
- De kosten voor afschrijving, onderhoud en dergelijke zijn € 1900,00 per jaar.

Maar rijdt de auto bijvoorbeeld op gas, of op diesel, of elektrisch, dan liggen deze bedragen anders. Voor een vergelijkbare auto op diesel zijn op hetzelfde moment dit de schattingen:

- De prijs van een liter diesel is € 1,30 en je rijdt 26 km op elke liter benzine.
- De wegenbelasting is € 1400,00 per jaar.
- De verzekering kost € 200,00 per jaar.
- De kosten voor afschrijving, onderhoud en dergelijke zijn € 2200,00 per jaar.

Je kunt dit probleem oplossen met behulp van lineaire verbanden, maar ook met een hyperbolisch verband...

### Opgave 14

In de tekst in **Toepassen** zie je schattingen van de diverse kosten die je maakt als je in een eigen auto wilt rijden. Ga in deze opgave uit van die gegevens.

In deze opgave ga je op zoek naar een formule voor de kosten per jaarlijks gereden kilometer. Je vergelijkt een auto op benzine met een auto op diesel. De kosten per km noem je  $k$  en het jaarlijkse aantal gereden km noem je  $a$ .

Ga eerst uit van een auto die op benzine rijdt.

- Stel op grond van de schattingen een formule op voor  $k$  afhankelijk van  $a$ .
- Vanaf hoeveel gereden km per jaar is de kilometervergoeding kostendekkend?  
Ga nu uit van een auto die op diesel rijdt.
- Stel op grond van de schattingen een formule op voor  $k$  afhankelijk van  $a$ .
- Vanaf hoeveel gereden km per jaar is de kilometervergoeding kostendekkend?

### Opgave 15: Evenredig met een kwadraat

Je hebt tot nu toe de begrippen ‘recht evenredig’ en ‘omgekeerd evenredig’ geleerd. Onthoud deze begrippen goed, ze komen regelmatig voor in toepassingen van de wiskunde. Een variabele kan echter ook wel recht evenredig zijn met het kwadraat van een andere variabele. Of omgekeerd evenredig met een kwadraat...

Wanneer  $y$  recht evenredig is met het kwadraat van  $x$ , dan hoort daarbij een formule van de vorm  $y = c \cdot x^2$ . Hierin is  $c$  een constante.

- a Neem eerst  $c = 1$ . Maak een tabel voor gehele waarden van  $x$  vanaf -3 tot en met 3 en teken een bijpassende grafiek.
- b Je kunt deze grafiek ook maken in **GeoGebra** door op de invoerbalk de formule in te voeren. Doe dat en ga na of je grafiek overeenkomt met de grafiek die je bij a hebt getekend.
- c Onderzoek nu met behulp van GeoGebra of de grafiek bij andere waarden van  $c$  dezelfde vorm heeft. Probeer te beschrijven hoe de grafiek verandert afhankelijk van de gekozen waarde voor  $c$ .  
Wanneer  $y$  omgekeerd evenredig is met het kwadraat van  $x$ , dan hoort daarbij een formule van de vorm  $y = \frac{c}{x^2}$ . Hierin is  $c$  een constante.
- d Neem eerst  $c = 1$ . Maak een tabel zoals deze en teken een bijpassende grafiek.

x	-4	-2	-1	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5	1	2	4
x											

Tabel 1

- e Je kunt deze grafiek ook maken in **GeoGebra** door op de invoerbalk de formule in te voeren. Doe dat en ga na of je grafiek overeenkomt met de grafiek die je bij d hebt getekend.
- f Onderzoek nu met behulp van GeoGebra of de grafiek bij andere waarden van  $c$  dezelfde vorm heeft. Probeer te beschrijven hoe de grafiek verandert afhankelijk van de gekozen waarde voor  $c$ .

## Testen

### Opgave 16

Mark organiseert een festival en huurt een terrein. De kosten hiervoor bedragen € 3500,00 en daarbij komt nog € 2,50 aan kosten per persoon.

- a Stel Mark vraagt geen entree. Wat kost het hem dan per gast wanneer hij 300 mensen uitnodigt?
- b Stel de formule op voor de kosten  $K$  per gast, afhankelijk van het aantal gasten  $q$ .
- c Stel Mark wil in totaal € 650,00 winst maken. Hij nodigt 400 mensen uit. Welk bedrag moet hij dan als entree vragen?

### Opgave 17

Los de volgende vergelijkingen op:

- a  $\frac{1200}{x} + 5 = 35$
- b  $\frac{t+5}{300} - 1 = 2,5$
- c  $\frac{40}{p-2} = 8$

## Practicum

### Applet: hyperbolisch verband

Hier zie je de grafiek van een **hyperbolisch verband**.

Je kunt de invloed van de waarden van  $c$  en  $d$  op de grafiek bekijken.





© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: [f.spijkers@math4all.nl](mailto:f.spijkers@math4all.nl)

Met de Math4All Foliostaat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij [a.f.otten@math4all.nl](mailto:a.f.otten@math4all.nl) een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.

---

