4.4 Omgekeerd evenredig

Inleiding

Hoe sneller je loopt, fietst, of rijdt, hoe minder tijd je nodig hebt om een bepaalde afstand af te leggen. Daarom bestaat er tussen afstand en tijd vaak geen recht evenredig of lineair verband. Je gaat nu kennismaken met omgekeerd evenredige verbanden.

$$y = a \cdot x$$

recht evenredig

omgekeerd evenredig

$$y = \frac{a}{x}$$

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- formules en grafieken bij omgekeerd evenredige verbanden maken en gebruiken.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- recht evenredige en lineaire verbanden herkennen en het hellingsgetal, de richtingscoëfficiënt, bepalen;
- formules en grafieken bij recht evenredige en lineaire verbanden maken en gebruiken;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode.

Verkennen

Opgave V1

Je rijdt met de auto 16 km over de snelweg. Hoe sneller je (gemiddeld) rijdt, hoe korter je over die 16 km doet: rijd je (gemiddeld) twee keer zo snel, dan heb je de helft van de reistijd nodig.

a Als je 16 km met 120 km/uur rijdt, hoe lang doe je daar dan over? Geef je antwoord eerst in uren en dan in minuten.

b Als je 16 km met 60 km/uur rijdt, hoe lang doe je daar dan over? Geef je antwoord eerst in uren en dan in minuten.

Noem de snelheid in km/uur v en de reistijd in uren t.

c Waarom is hier geen sprake van een recht evenredig verband?

d Welke formule geeft het verband tussen t en v weer?

Opgave V2

Van een rechthoek is de oppervlakte 24 m^2.

a Hoe groot is de breedte als de lengte 8 m is?

b Hoe groot is de breedte als de lengte 4 m is?

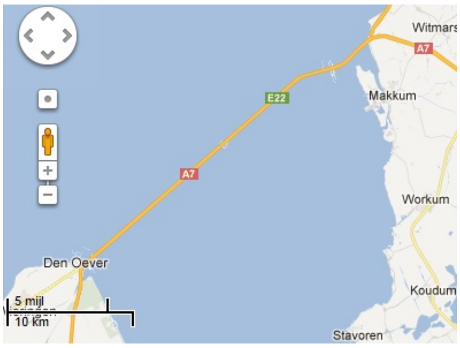
c Hoe groot is de breedte als de lengte x m is?

d Waarom wordt een verband zoals dat tussen de lengte en de breedte van een rechthoek met oppervlakte 24 m^2 wel ‘omgekeerd evenredig’ genoemd?

Uitleg

Op de Afsluitdijk ligt een snelweg met een lengte van 32 km. Hoe hoger je snelheid, hoe korter de tijd dat je op de Afsluitdijk rijdt. De tijd die je nodig hebt, is omgekeerd evenredig met de snelheid: rijd je twee keer zo snel, dan heb je de helft van de reistijd nodig:

- Rijd je 60 km/h, dan ben je $\frac{32}{60} \cdot 60 = 32$ minuten onderweg.
- Rijd je 120 km/h, dan ben je $\frac{32}{120} \cdot 60 = 16$ minuten onderweg.

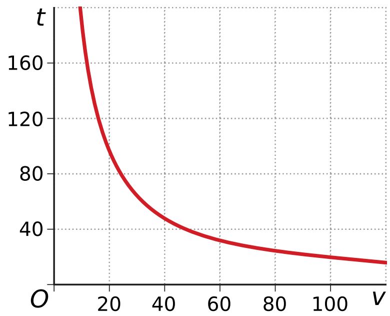


Figuur 2

Je ziet dat je de reistijd t in minuten kunt berekenen door de afstand van 32 km te delen door de snelheid v (in km/h) en met 60 te vermenigvuldigen: $t = \frac{32}{v} \cdot 60 = \frac{1920}{v}$. Ook geldt $v \cdot t = 1920$.

Bij een formule zoals $t = \frac{1920}{v}$ spreek je van een omgekeerd evenredig verband.

De grafiek van zo'n omgekeerd evenredig verband is een hyperbool. Je ziet de hyperbool bij de formule $t = \frac{1920}{v}$ voor positieve waarden van t en v.



Figuur 3

Opgave 1

Je rijdt 32 km over de snelweg.

a Hoeveel minuten doe je daarover als je 80 km/h rijdt?

b Hoeveel minuten doe je daarover als je 40 km/h rijdt?

Als het goed is, heb je bij a en b ontdekt dat bij een twee keer zo grote snelheid een half keer zo grote reistijd hoort.

c Laat met behulp van de formule in de **Uitleg** zien dat dit altijd waar is door de formules bij v en bij $2v$ met elkaar te vergelijken.

d Controleer de grafiek van $t = \frac{1920}{v}$. Maak daartoe een tabel met voor v de waarden 10, 20, ...

e Wat betekent het voor de reistijd als je snelheid bijna 0 wordt? Wat betekent dit voor de grafiek?

f Wat betekent het voor de reistijd als je snelheid heel groot wordt? Wat betekent dit voor de grafiek?

Opgave 2

Elk omgekeerd evenredig verband heeft een formule van de vorm $y = \frac{c}{x}$ waarin c een constant getal is. Je kunt voor c getallen kiezen. Neem alleen niet $c = 0$.

a Neem $c = 1$ en bekijk de grafiek. De grafiek gaat door de punten (1, 1), (2; 0,5) en (0,5; 2). Laat zien dat deze punten ook aan de formule voldoen.

b Welke waarde heeft y als $x = 100$?
En als $x = 100000$?

c Bij welke waarde van x geldt $y = 100$?
En welke als $y = 100000$?

Voor verschillende waarden van c krijg je verschillende grafieken. Het zijn allemaal hyperbolen.

d Bij welke waarde van c gaat die hyperbool door het punt (2,3)?

e Waarom hebben al deze grafieken geen punt met $x = 0$?

Opgave 3

Het omgekeerde van een getal g is het getal dat met g vermenigvuldigd 1 oplevert.

a Laat zien dat het omgekeerde van g gelijk is aan $\frac{1}{g}$.

b Wat is het omgekeerde van 3?
En van $\frac{3}{7}$?

c Waarom heeft 0 geen omgekeerde?

d Leg uit waarom 'omgekeerd evenredig' hetzelfde betekent als 'recht evenredig met het omgekeerde'.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: grafiek omgekeerd evenredig verband

Bij een formule van de vorm $y = \frac{c}{x}$ met c een constant getal, spreek je van een **omgekeerd evenredig verband**. Je zegt wel dat de variabelen x en y **omgekeerd evenredig** zijn.

In het algemeen geldt:

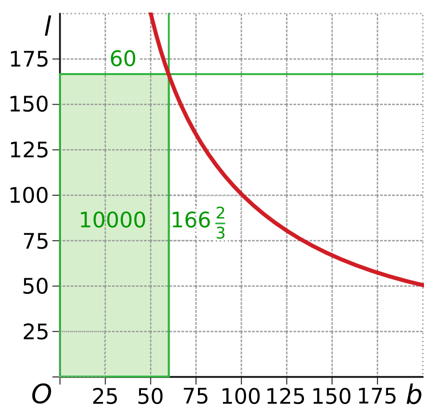
- Twee variabelen x en y zijn omgekeerd evenredig als het vermenigvuldigen van x met een getal k tot gevolg heeft dat y met $\frac{1}{k}$ wordt vermenigvuldigd. Bijvoorbeeld: wordt x twee keer zo groot, dan wordt y een half keer zo groot.
- Je kunt de formule $y = \frac{c}{x}$ ook schrijven als $x y = c$.

De grafiek van zo'n omgekeerd evenredig verband is een **hyperbool**.

Voorbeeld 1

Applet: rechthoek met vaste oppervlakte

Als een rechthoekig tafelblad een oppervlakte van 1 m^2 heeft, kunnen lengte l en breedte b nog variëren. Laat zien dat l en b omgekeerd evenredig zijn en stel een passende formule op met l en b in centimeters.



Figuur 4

Antwoord

Voor de oppervlakte van de rechthoek geldt: $l \cdot b = 10000$ cm^2

Dit kun je schrijven als: $l = \frac{10000}{b}$

- Bij $b = 100$ hoort $l = \frac{10000}{100} = 100$.
- Bij $b = 200$ hoort $l = \frac{10000}{200} = 50$.

Wordt b twee keer zo groot, dan wordt l gehalveerd. Dit kun je ook voor andere waarden nagaan.
l en b zijn omgekeerd evenredig.

Opgave 4

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe er duidelijk wordt gemaakt dat lengte l en breedte b omgekeerd evenredig zijn.

a Laat dit voor twee andere waarden van b zien.

b Waarom heb je hiermee nog niet echt aangetoond dat dit altijd geldt?

c Vul nu als waarden voor b in: $b = x$ en $b = 2x$. Kun je nu wel concluderen dat l en b omgekeerd evenredig zijn?

d Teken een grafiek van l afhankelijk van b.

Neem aan dat de omtrek van de rechthoek 410 cm is.

e Leg uit dat dit betekent dat $l = 205 - b$.

f Teken in de grafiek die je bij d hebt gemaakt nu ook de grafiek bij de formule van e. Zoek uit welke lengte en breedte de rechthoek heeft die aan beide formules voldoet.

Opgave 5

Bij de productie van bijvoorbeeld verf is er niet alleen sprake van productiekosten per liter, maar ook van vaste kosten (machine, bedrijfshal, enzovoort). Neem aan dat die vaste kosten € 32000,00 bedragen.

a Laat met een voorbeeld zien dat de vaste kosten per liter gerekend (k in euro's/liter) omgekeerd evenredig zijn met het aantal geproduceerde liters a.

b Welke formule kun je opstellen voor k afhankelijk van a?

c Bij welke waarde van a worden de vaste kosten per liter kleiner dan € 0,50?

Verwerken

Opgave 6

Stel je fietst steeds dezelfde route van huis naar school met een constante snelheid.

De tijd die hiervoor nodig is, is omgekeerd evenredig met de snelheid.

a Als de snelheid verdubbelt, wat betekent dit dan voor de tijd?

b Als de tijd verdubbelt, wat betekent dit dan voor de snelheid?

c Welke standaardformule hoort bij deze situatie? Gebruik v voor snelheid, t voor tijd en a voor de afgelegde afstand.

Opgave 7

Bij het rijden in een auto heb je behalve met de brandstofkosten per gereden kilometer ook te maken met vaste jaarlijkse kosten voor onder andere wegenbelasting, verzekering, garagekosten en afschrijving. Wanneer je wilt uitrekenen hoeveel een auto per gereden kilometer kost, dan moet je ook met die vaste kosten rekening houden.

Mevrouw Jansen schat haar vaste kosten op € 3800,00 per jaar. Als ze dit wil omrekenen naar vaste kosten per kilometer, dan moet ze haar vaste kosten delen door het aantal kilometers dat ze per jaar rijdt.

a Wat zijn haar vaste kosten per kilometer als ze 19000 km in een jaar rijdt?

b Leg uit dat haar vaste kosten per km v omgekeerd evenredig zijn met het jaarlijks aantal gereden kilometers a.

c Stel een formule op voor v afhankelijk van a en teken een bijpassende grafiek.

d Bij welk jaarlijks gereden aantal kilometers zijn haar vaste kosten per kilometer minder dan € 0,10?

Opgave 8

Een rechthoek met lengte l en breedte b heeft oppervlakte A.

a Stel je voor dat $l = 10$, maar dat b nog kan variëren. Welke formule geldt dan voor A afhankelijk van b? Is A recht evenredig of omgekeerd evenredig met b?

b Stel je voor dat $A = 200$, maar dat l en b nog kunnen variëren. Welke formule geldt dan voor l afhankelijk van b? Is l recht evenredig of omgekeerd evenredig met b?

c Stel je voor dat $l = 2b$. Welke formule geldt dan voor A afhankelijk van b? Is er nu sprake van een recht of omgekeerd evenredig verband?

Opgave 9

Een boer wil voor zijn paard een rechthoekig weiland van 1200 m^2 afzetten. Hij heeft nog zo veel palen en draad, dat de omheining 182 meter lang kan worden.

a De oppervlakte van het weiland wordt 1200 m^2. Leg uit, dat de lengte l en de breedte b van het weiland daarom omgekeerd evenredig zijn. Stel een bijpassende formule op.

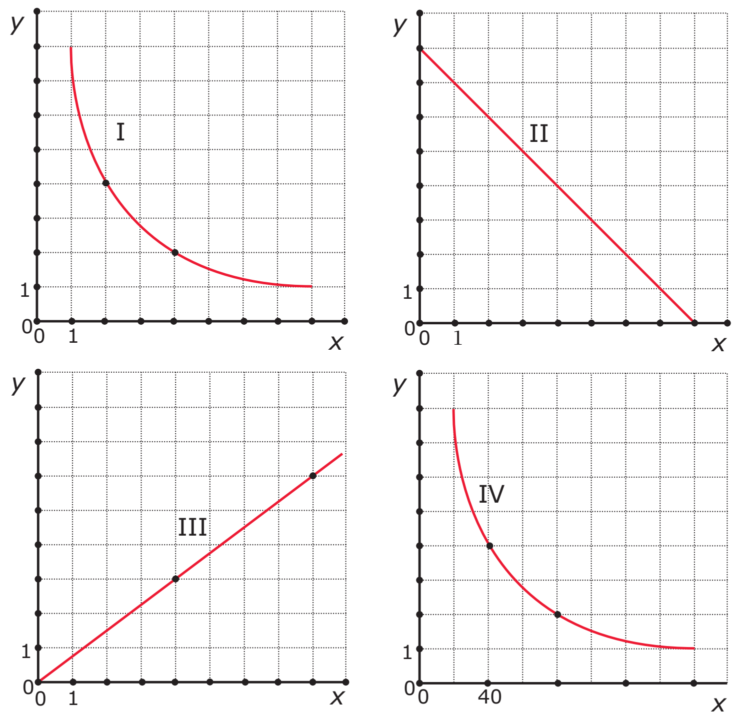
b Omdat de omheining 182 m wordt, kun je nog een formule van de vorm $l = ...$ afleiden. Schrijf die formule op.

c Teken de grafieken bij deze formules in één assenstelsel.

d Bepaal nu met behulp van de grafiek en inklemmen welke afmetingen het weiland krijgt.

Opgave 10

Je ziet twee hyperbolen en twee rechte lijnen. Schrijf bij elk van deze grafieken een passende formule op. Gebruik de aangegeven roosterpunten. Zet erbij of de variabelen recht evenredig of omgekeerd evenredig zijn, of geen van beide.



Figuur 5

Opgave 11

Een wandelaar maakt een wandeling van 2 uur. Eerst loopt hij op een vlak stuk weg met snelheid 4 km/h. Daarna moet hij een stuk omhoog. Zijn snelheid is dan 3 km/h. Als hij boven is, dan gaat hij terug. Eerst dus datzelfde stuk omlaag. Dat kan hij snel: 6 km/h. Daarna weer hetzelfde vlakke stuk terug, weer met snelheid 4 km/h.
Hoeveel km heeft de wandelaar gewandeld?

A. 8
B. 9
C. 10
D. 11
E. 12

Toepassen

Opgave 12: Hijskraan

Deze hijskraan kan zware lasten tillen. De last hangt aan een katrol die langs de arm beweegt. De afstand van de plek waaronder de katrol hangt tot het steunpunt van de arm, heet de armlengte a.

Het grootste gewicht G dat deze kraan kan tillen, hangt af van de armlengte.

Voor deze kraan geldt: $G = \frac{120000}{a}$

Hierin is G in kg en a in meters.

In deze opgave bereken je op welke afstand van de kraan een gewicht van 6 ton (6000 kg) nog kan hangen.

a Welke ongelijkheid moet er worden opgelost?

b Los de bijbehorende vergelijking op.

c Op welke afstand van de kraan kan een gewicht van 6 ton dus nog hangen?

d Om een stapel stenen naar de goede plek te hijsen moet deze stapel 23 m van het steunpunt van de draaiarm kunnen hangen. Hoe zwaar mag die stapel stenen hoogstens zijn?

Figuur 6

Testen

Opgave 13

De heer Rabiat rijdt elke werkdag 60 km naar zijn bedrijf. Omdat hij bijna de hele weg op de autosnelweg rijdt, heeft hij vrijwel voortdurend dezelfde snelheid.

a Hoeveel minuten reistijd heeft hij als hij 100 km per uur rijdt?

b Hoeveel minuten reistijd heeft hij als hij 80 km per uur rijdt?

c Waarom is de reistijd t in minuten omgekeerd evenredig met de rijsnelheid v in km/h? Stel een bijpassende formule op.

d Donderdag heeft de heer Rabiat 30 minuten over de terugreis van zijn bedrijf naar huis gedaan. Hoe hard heeft hij gereden?

Opgave 14

Lotte geeft voor haar verjaardag een feestje. Ze koopt 120 flessen frisdrank van 2,5 liter (L) (2500 milliliter (mL)). Uit ervaring blijkt dat elke gast gemiddeld 400 milliliter frisdrank per uur drinkt.

a Stel ze nodigt 70 mensen uit, hoelang duurt het dan voordat alle flessen leeg zijn?

b Stel ze wil dat het feestje minimaal 5 uur doorgaat. Hoeveel mensen kan ze dan uitnodigen?

c Stel de formule op voor het aantal uur dat het feest door kan gaan met t (uur) afhankelijk van q (het aantal gasten).

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.