

4.3 Lineaire vergelijkingen

Inleiding

Soms wil je lineaire verbanden met elkaar vergelijken. Bijvoorbeeld als je wilt weten welke aanbieder het goedkoopst is, of welke kaars langer brandt, of...

Gelukkig ken je de balansmethode nog wel!?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- vergelijkingen en ongelijkheden bij lineaire verbanden opstellen en oplossen.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- recht evenredige en lineaire verbanden herkennen en het hellingsgetal, de richtingscoëfficiënt, bepalen;
- formules en grafieken bij recht evenredige en lineaire verbanden maken en gebruiken;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode.

Verkennen

Opgave V1

De productie van een nieuw soort verf kost € 3,50 per liter. Verder zijn er vaste kosten (machines, gebouwen, etc.) van € 24000,00. De fabrikant van deze verf wil de verf verkopen voor € 7,20 per liter.

Hoeveel liter moet hij verkopen om winst te gaan maken?

- Stel een formule op voor de kostprijs K van a blikken verf.
- Stel ook een formule op voor de opbrengst R als alle a blikken verf zijn verkocht.
- Bij welke van beide formules is sprake van een recht evenredig verband?
- Leg uit dat de vraag van de fabrikant kan worden vertaald in $7,20a > 24000 + 3,50 \cdot a$.
- Hoe zou je de ongelijkheid bij d oplossen?

Uitleg

De productie van een nieuw soort verf kost € 3,50 per liter. Verder zijn de vaste kosten (machines, gebouwen, enzovoort) berekend op € 24000. De fabrikant van deze verf wil de verf verkopen voor € 7,20 per liter.

Hoeveel liter moet hij verkopen om winst te gaan maken?

Je begint met het opstellen van de formules voor de kosten en de opbrengst.

De productiekosten K hangen af van het geproduceerde aantal liters a : $K = 24000 + 3,50a$

Als alle geproduceerde verf verkocht wordt, hangt de opbrengst R ook van a af: $R = 7,20a$

Om winst te maken, moet de opbrengst hoger zijn dan de kosten, dus $R > K$. Vul je voor R en K de betreffende formules in, krijg je een lineaire ongelijkheid:

$$7,20a > 24000 + 3,50a$$

Om de vraag te beantwoorden: “Hoeveel liter moet hij verkopen om winst te gaan maken?” moet je deze lineaire ongelijkheid oplossen. Daarvoor los je eerst de bijbehorende lineaire vergelijking op:

$$7,20a = 24000 + 3,50a$$

Voor zo'n vergelijking gebruik je de balansmethode:

$$\begin{aligned} 7,20a &= 24000 + 3,50a \\ 3,70a &= 24000 && \text{beide zijden } -3,50a \\ a &= \frac{24000}{3,70} \approx 6486,5 && \text{beide zijden delen door } 3,70 \end{aligned}$$

Als je ervan uitgaat dat de fabrikant alleen hele liters verkoopt, zijn de opbrengsten bij een verkoop van 6487 liter gelijk aan de kosten. Wordt er meer verkocht, worden de opbrengsten groter dan de kosten. Dan maakt de fabrikant dus winst. De oplossing van de lineaire ongelijkheid $7,20a > 24000 + 3,50a$ is dus $a > 6486,5$.

Opgave 1

Bekijk het probleem in de **Uitleg**. Er wordt gesteld dat je de vergelijking $7,20a = 24000 + 3,50a$ kunt oplossen met de balansmethode.

- Waarom hoort bij de aan het begin van de uitleg gestelde vraag een ongelijkheid?
- De oplossing van het probleem is dat het aantal geproduceerde liters 6487 liter of meer zou moeten zijn. Ga na dat bij 6487 liter inderdaad winst wordt gemaakt en bij 6486 niet.

Opgave 2

Bij het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden bij lineaire verbanden speelt de balansmethode een grote rol. Die moet je goed beheersen. Los de vergelijkingen op met de balansmethode.

- $15a + 38 = 10a + 53$
- $5a - 36 = -96 - 3a$
- $25g - 150 = 18g$
- $15200 + 0,8x = 8400 + 2x$

Opgave 3

Voor de productie van een nieuw soort verf geldt dat de kosten per liter € 4,00 bedragen. De vaste kosten zijn € 21000,00. De fabrikant verkoopt zijn verf voor € 6,40 per liter.

- Stel de formule op voor de productiekosten K en de opbrengst R voor wanneer alle verf wordt verkocht. Beide variabelen zijn afhankelijk van het aantal verkochte liters verf a .
- Hoeveel liter moet de fabrikant verkopen voordat hij winst gaat maken?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Soms heb je met twee (of meer) lineaire verbanden te maken en wil je weten wanneer de uitkomsten bij het éne verband meer, minder zijn dan die bij het andere verband. Je krijgt dan een **lineaire ongelijkheid**.

Daarvoor los je eerst de bijbehorende **lineaire vergelijking** op.

Voor zo'n vergelijking gebruik je de **balansmethode**:

- aan beide zijden van het isgelijktteken mag je hetzelfde optellen of aftrekken;
- aan beide zijden van het isgelijktteken kun je met hetzelfde vermenigvuldigen of door hetzelfde delen als dit maar ongelijk is aan 0.

Heb je de vergelijking opgelost, dan kijk je naar de grafieken van beide verbanden om antwoord op de gestelde vraag te kunnen geven.

Voorbeeld 1

Deze grafieken laten zien hoe twee cilindervormige kaarsen opbranden. L is de lengte van de kaars in centimeters en t is de brandtijd in uren.

Bereken in minuten nauwkeurig het moment waarop beide kaarsen even lang zijn.

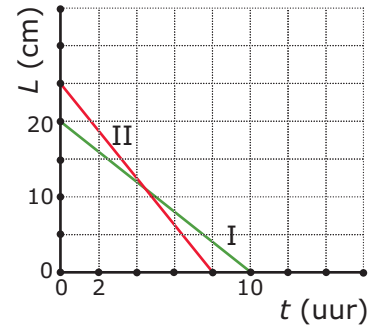
Antwoord

Stel bij elke grafiek een formule op:

- kaars I: $L = 20 - 2t$
- kaars II: $L = 25 - 3,125t$

Beide kaarsen zijn even lang als: $20 - 2t = 25 - 3,125t$. Oplossen geeft:

$$\begin{aligned}
 20 - 2t &= 25 - 3,125t && \text{beide zijden } -20 \\
 -2t &= 5 - 3,125t && \text{beide zijden } +3,125t \\
 1,125t &= 5 && \text{beide zijden } : 1,125t \\
 t &= \frac{5}{1,125} && \\
 t &= 4\frac{4}{9} && \text{berekenen}
 \end{aligned}$$



Figuur 2

Beide kaarsen zijn even lang na ongeveer 4 uur en 27 minuten ($\frac{4}{9} \cdot 60 \approx 27$, omgerekend naar minuten).

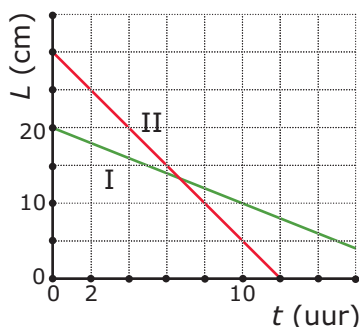
Opgave 4

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je kunt berekenen op welk tijdstip twee verschillende cilindervormige kaarsen (die gelijkmatig opbranden) even lang zijn als ze tegelijk worden aangestoken.

- Hoe zie je aan de grafiek dat beide kaarsen tegelijk worden aangestoken?
- Stel zelf de formules op voor de lengte L van deze kaarsen.
- Met de balansmethode wordt het tijdstip berekend waarop beide kaarsen even lang zijn. Bereken dit tijdstip in seconden nauwkeurig.

Opgave 5

Je ziet de grafieken van twee cilindervormige kaarsen die tegelijk worden aangestoken.



Figuur 3

Na hoeveel minuten is kaars I langer dan kaars II?

Opgave 6

Lijn l gaat door de punten $A(3,60)$ en $B(7,40)$ en lijn m gaat door de punten $C(4,50)$ en $D(9,60)$. Bereken de exacte coördinaten van het snijpunt van beide lijnen.

Voorbeeld 2

Je ziet hier twee voorbeelden van het oplossen van lineaire vergelijkingen die wat lastiger zijn. Kijk goed wat er elke stap gebeurt.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x - 5 &= \frac{5}{6}x + \frac{1}{2} && \text{stap 1} \\ 2x - 30 &= 5x + 3 && \text{stap 2} \\ -3x &= 33 && \text{stap 3} \\ x &= \frac{33}{-3} && \text{stap 4} \\ x &= -11 \end{aligned}$$

Eerste voorbeeld

$$\begin{aligned} 6 - (x - 12) &= 3(12 - 3x) && \text{stap 1} \\ 6 - x + 12 &= 36 - 9x && \text{stap 2} \\ 18 - x &= 36 - 9x && \text{stap 3} \\ 8x &= 18 && \text{stap 4} \\ x &= \frac{18}{8} = 2,25 \end{aligned}$$

Tweede voorbeeld

Figuur 4

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 2** de twee uitwerkingen van wat lastiger lineaire vergelijkingen. In de eerste vergelijking komen breuken voor, in de tweede vergelijking haakjes.

Bekijk de eerste vergelijking.

- Wat gebeurt er in de eerste stap van de oplossing?
- In de tweede stap gebeuren er twee dingen tegelijk, welke twee? Is de volgorde daarbij belangrijk?

Bekijk vervolgens de tweede vergelijking. Zowel links als rechts van het isgelijktteken worden de haakjes weggewerkt.

- Leg uit hoe dit gebeurt.
- Loop de rest van de uitwerking na. Controleer het antwoord.

Opgave 8

Los de vergelijkingen op.

- $\frac{2a+20}{6} = 10$
- $\frac{1}{2}(12 - p) = p - (27 - p)$
- $(5 - 2x) - (x + 4) = 7$
- $\frac{1}{5}t - 0,8 = 2 - \frac{1}{2}t$

Opgave 9

Met AlgebraKIT kun je het oplossen van vergelijkingen oefenen. Bekijk het **Practicum**.

Verwerken

Opgave 10

Los de vergelijkingen op.

- $-6k + 55 = 4k - 25$
- $12 - 4x = 36 + 2x$

c $\frac{1}{3}x - 25 = 16 + \frac{1}{2}x$

d $5(4 - 2x) = 5x - (3 + x)$

Opgave 11

Los de vergelijkingen op.

a $\frac{3a-3}{3} + 2,5 = \frac{1}{2}a - 3,5$

b $\frac{1}{6}q + 2q = 3q - 0,5 + 7$

c $p(3 - 1) + 2 \cdot \frac{1}{6}p = 15p + 30$

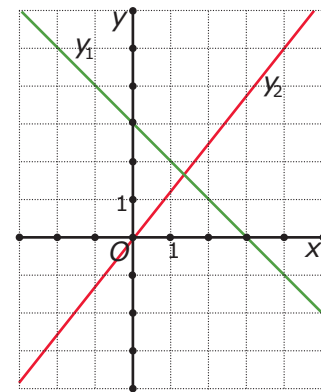
Opgave 12

Je ziet de grafieken van twee lineaire verbanden, aangegeven met y_1 en y_2 .

a Los op: $y_1 = y_2$

b Los op: $y_1 > y_2$.

c Controleer je antwoord bij b voor enkele waarden van x .



Figuur 5

Opgave 13

Voor de jaarlijkse kosten K (euro) voor het waterverbruik v (m^3) in twee gebieden A en B gelden de formules:

- gebied A: $K = 36 + 1,80v$
- gebied B: $K = 48 + 1,55v$

Schrijf bij de volgende vragen steeds de bijbehorende ongelijkheid op en los deze vergelijking op. Geef je antwoord in m^3 nauwkeurig.

- a Bij welk verbruik zijn de kosten in gebied A lager dan in gebied B?
- b Bij welk verbruik zijn de kosten in gebied B hoger dan € 200?

Opgave 14

De temperatuur boven het aardoppervlak hangt onder andere af van de hoogte waarop je je bevindt. Vooral voor bergbeklimmers is het belangrijk om te weten dat elke stijging van 100 m een daling van de temperatuur van ongeveer $0,6 \text{ }^\circ\text{C}$ betekent.

Twee bergbeklimmers meten een temperatuur van $16 \text{ }^\circ\text{C}$.

- a Welke temperatuur meten zij als ze nog 120 m omhoog klimmen?
- b Het aantal meters dat ze omhoog gaan, kun je h noemen. Welke formule geeft dan het verband weer tussen temperatuur T in $^\circ\text{C}$ en h ?
- c Welke ongelijkheid hoort er bij de vraag: ‘Na hoeveel meter stijgen komt de temperatuur die ze meten, onder het vriespunt?’
- d Los de ongelijkheid bij c op. Geef je antwoord in tientallen meters nauwkeurig.

Opgave 15

Twee auto's rijden elkaar op de snelweg tegemoet. Op een zeker moment zijn ze nog 120 km van elkaar verwijderd. Auto A rijdt met een snelheid van 115 km/h en auto B met een snelheid van 105 km/h.

Na hoeveel tijd passeren ze elkaar? Geef je antwoord in seconden nauwkeurig.

Toepassen

Iemand wil een nieuwe auto aanschaffen en twijfelt tussen een auto die op benzine rijdt en een zelfde auto die op diesel rijdt. Hij heeft deze formules opgesteld voor de kosten K afhankelijk van het aantal km a dat hij jaarlijks rijdt.

Benzineauto: $K = 2400 + 0,14a$

Dieselauto: $K = 3800 + 0,05a$

Welke auto is voor hem voordeliger?



Figuur 6

Opgave 16

Gebruik de gegeven formules uit **Toepassen** hierboven.

- Welke ongelijkheid moet er worden opgelost?
- Los deze ongelijkheid op.
- Welk antwoord geef je nu op de vraag die de automobilist zichzelf heeft gesteld.

Opgave 17

Je wilt in een auto die op benzine rijdt een gastank inbouwen. Dat kost € 1450,00. Gas kost € 0,75 per liter en je rijdt 16 km op 1 liter gas. De benzinekosten zijn € 0,11 per kilometer. De totale kosten K_g voor het rijden op gas hangen af van het aantal kilometers a dat je rijdt.

- Stel een formule op voor K_g . Rond het hellingsgetal af op twee decimalen.
- Stel ook een formule op voor K_b , de brandstofkosten aan benzine voor het aantal gereden kilometers a .
- Na hoeveel gereden kilometers heb je de kosten van de gastank terugverdiend?

Testen

Opgave 18

Los de vergelijkingen op.

- $4500 - 15g = 600$
- $4000 + 14,5g = 12000 - 10,5g$
- $\frac{x}{3} - 25 = 16$
- $\frac{6-x}{3} = 2(4-x)$

Opgave 19


Voor de productie van een nieuw soort telefoonhoesje bedragen de productiekosten per hoestje € 0,85. De vaste kosten bedragen € 11000. De fabrikant verkoopt de hoestjes voor € 2,80 per stuk.

- Stel de formule op voor de productiekosten K en de opbrengst R voor wanneer de fabrikant alle hoestjes verkoopt. Beide zijn afhankelijk van het aantal verkochte hoestjes a .
- Hoeveel hoestjes moet de fabrikant verkopen voordat hij winst gaat maken?

Practicum

Met *AlgebraKIT* kun je oefenen met **vergelijkingen oplossen met de balansmethode**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostaat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
