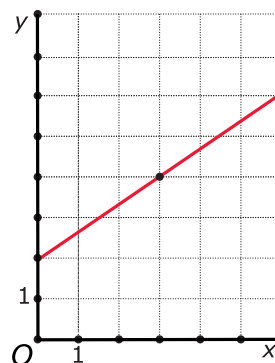


4.2 Lineaire verbanden

Inleiding

Er zijn natuurlijk ook situaties waarbij rechte lijn grafieken niet door de oorsprong van het assenstelsel gaan. Je gaat nu zien wanneer dat het geval is. Rechte lijn grafieken horen bij lineaire verbanden.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- formules en grafieken bij lineaire verbanden maken en gebruiken;
- de begrippen hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) en startgetal;
- bij een lineaire grafiek een formule opstellen.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- recht evenredige verbanden herkennen en de evenredigheidsconstante, het hellingsgetal, bepalen;
- formules en grafieken bij recht evenredige verbanden maken en gebruiken;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

Niet overal op de wereld kun je met de euro betalen. In Denemarken bijvoorbeeld betaal je met de Deense Kroon (DKK). Een Deense Kroon is ongeveer € 0,13. Wil je bij een bank Deense Kronen kopen dan betaal je vaak ook nog transactiekosten, dat zijn kosten voor het werk dat de bank heeft aan het afhandelen van jouw betalingsopdracht. Stel dat die kosten € 2,50 per transactie zijn.



Figuur 2

- Hoeveel betaal je bij deze koers en deze transactiekosten voor DKK 600,00?
- En als je twee keer zoveel Deense Kronen wilt, betaal je dan ook twee keer zoveel?
- Noem de kosten voor het kopen van Deense Kronen E (in €) en het aantal Deense Kronen D . Welke formule geldt er dan? En hoe ziet de bijbehorende grafiek er uit?

Uitleg

Met een glasvezelabonnement ben je voorzien van t.v., internet en telefonie. Je betaalt maandelijks abonnementskosten en daar bovenop belkosten.

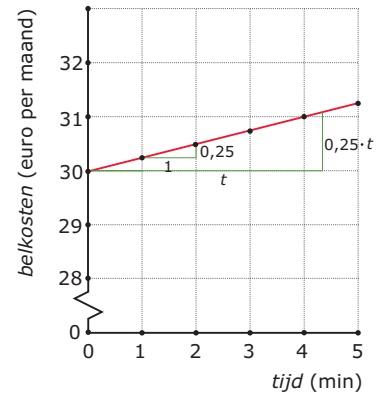
Stel je betaalt € 30,00 abonnementskosten per maand en nog € 0,25 per gebelde minuut. Van de kosten per maand kun je een grafiek maken. Je kosten per maand zijn:

- 0 minuten gebeld: 30,00 euro
- 1 minuut gebeld: $30 + 1 \cdot 0,25 = 30,25$ euro
- 2 minuten gebeld: $30 + 2 \cdot 0,25 = 30,50$ euro
- 3 minuten gebeld: $30 + 3 \cdot 0,25 = 30,75$ euro
- 4 minuten gebeld: $30 + 4 \cdot 0,25 = 31,00$ euro
- t minuten gebeld: $30 + t \cdot 0,25$ euro

Dus geldt de formule: $K = 30 + 0,25t$

K stelt de belkosten per maand voor.

Omdat de grafiek een rechte lijn is, spreek je van een lineair verband. Het getal 30 is het startgetal en het hellingsgetal 0,25 bepaalt de helling van de grafiek. Het hellingsgetal is de vaste toename (of afname) van K bij een toename van t met 1 eenheid. Omdat dit getal de richting van de lijn bepaalt, heet het ook wel de richtingscoëfficiënt.



Figuur 3

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Je ziet een formule voor het berekenen van de maandelijks belkosten K afhankelijk van het aantal belminuten t .

- Neem de tabel over, vul de tabel in en teken de grafiek van K afhankelijk van t .
- Geef in je grafiek het startgetal en het hellingsgetal aan.
- De aanbieder van dit abonnement verlaagt de abonnementskosten tot € 20,00. Wat betekent dit voor de grafiek van K ?
- De aanbieder van dit abonnement verlaagt de belkosten per minuut tot € 0,20. Wat betekent dit voor de grafiek van K als de abonnementskosten € 30,00 blijven?

t	0	10	20	30	40	50
K	30,00					

Tabel 1

Opgave 2

Je vergelijkt twee telecomaanbieders en je hebt een telefoon waarmee je alleen kunt bellen (geen sms, geen internet, enzovoort, heel vroeger bestonden die echt!).

- Bedrijf A: abonnement € 9,90 per maand en € 0,25 per belminuut.
- Bedrijf B: geen abonnementskosten en € 0,36 per belminuut.

- Geef voor beide bedrijven een formule voor het verband tussen de kosten K en het aantal belminuten m .
- Neem de tabel over, vul de tabel in en teken bij beide formules een grafiek in één assenstelsel.
- Bij welk van beide bedrijven zijn de kosten recht evenredig met het aantal belminuten?

aantal belminuten m	0	50	100
K bedrijf A (euro)			
K bedrijf B (euro)			

Tabel 2

- bedrijf A
- bedrijf B

- Waarom is bij beide bedrijven sprake van een lineair verband? Geef bij elk van beide grafieken de richtingscoëfficiënt.
- Je belt per maand 85 minuten. Bij welk bedrijf neem jij een abonnement?

Theorie en voorbeelden

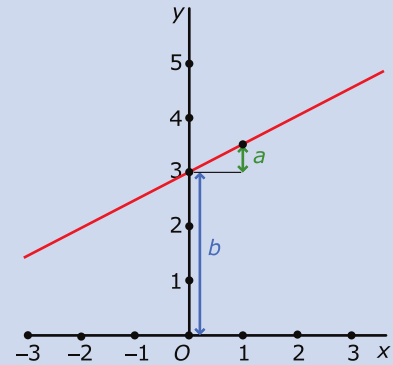
Om te onthouden

Bekijk de applet: Lineaire verbanden

Als er een **lineair verband** tussen y en x is, heeft de bijbehorende formule de vorm $y = a \cdot x + b$, waarin:

- a het **hellingsgetal**, dus de toe- of afname van y per stap van 1 van x ;
- b het **begingetal**, de uitkomst bij $x = 0$.

De grafiek bij zo'n lineair verband is een rechte lijn door $(0, b)$. Als je de waarde van x daarna met 1 verhoogt, neemt de uitkomst met a toe en als a negatief is, af. Het hellingsgetal a heet ook wel de **richtingscoëfficiënt**, want dit getal bepaalt de richting van de grafiek.



Figuur 4

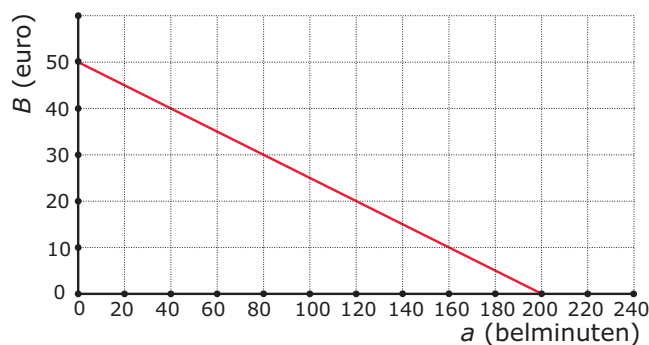
Voorbeeld 1

Bij een prepaid telefoonabonnement koop je vooraf beltegoed. Bijvoorbeeld een tegoed van € 50,00. Als elke minuut bellen € 0,25 kost, is je beltegoed B nog uitsluitend afhankelijk van het aantal belminuten a . Er geldt: $B = 50 - 0,25a$

Ook hier is sprake van een lineair verband. Het startgetal is 50.

De richtingscoëfficiënt is $-0,25$.

De bijbehorende grafiek is een dalende rechte lijn. Na $\frac{50}{0,25} = 200$ minuten is het beltegoed op.



Figuur 5

Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe de grootte van het beltegoed afhangt van het aantal minuten a dat je hebt gebeld.

- Bereken je beltegoed na 60 minuten bellen.
- Controleer met een berekening dat na 200 minuten bellen je beltegoed op is. Waarom namen ouders vaak zo'n abonnement voor hun kinderen?
- Wat betekent een negatieve richtingscoëfficiënt voor een lineaire grafiek?
- Wat gebeurt er met de formule en de grafiek als deze aanbieder van mobiele telefonie zijn belkosten per minuut verhoogt naar € 0,30?

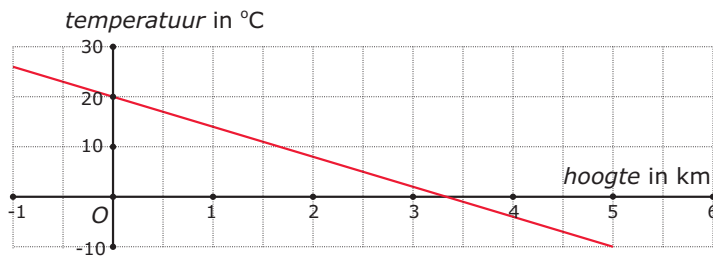
Opgave 4

Een cilindervormige kaars brandt gelijkmatig op, t is de brandtijd in uren. De kaars wordt elk uur 1,5 cm korter. Op een zeker moment ($t = 0$) is hij nog 25 cm lang.

- Waarom is de lengte van het stuk kaars dat is opgebrand recht evenredig met de brandtijd?
- Waarom is de kaarslengte L in centimeters niet recht evenredig met de brandtijd in uren?
- Geef een formule voor L (cm) afhankelijk van t (uur).

Voorbeeld 2

In de grafiek is te zien hoe de temperatuur T afhangt van de hoogte h boven de zeespiegel.



Figuur 6

Welke formule hoort bij het lineaire verband tussen T en h ?

Antwoord

Het startgetal is $20\text{ }^\circ\text{C}$, dat is het punt waar de grafiek de verticale as snijdt.

Om het hellingsgetal te weten te komen, zoek je twee 'mooie' punten op de grafiek. Hier zijn dat $(0, 20)$ en $(5, -10)$. Deze coördinaten gebruik je om het hellingsgetal te berekenen. Als de hoogte toeneemt van $h = 0$ tot $h = 5$, dan neemt de temperatuur af van $20\text{ }^\circ\text{C}$ naar $-10\text{ }^\circ\text{C}$. Bij elke hoogtestijging van $5 - 0 = 5$ km, verandert de temperatuur met $-10 - 20 = -30\text{ }^\circ\text{C}$. Per km dus met $\frac{-30}{5} = -6\text{ }^\circ\text{C}$.

Het hellingsgetal per kilometer is daarom -6 .

De gevraagde formule is:

$$T = 20 - 6h \text{ met } h \text{ in kilometers en } T \text{ in } ^\circ\text{C}.$$

Je kunt nu een tabel maken.

h	0	1	2	3	4	5
T	20	14	8	2	-4	-10

Tabel 3

Opgave 5

Bekijk de grafiek in **Voorbeeld 2**. Je wilt er een formule bij maken om op bepaalde hoogtes de temperatuur minstens op één graad nauwkeurig te kunnen berekenen.

- Waarom zoek je daarvoor twee 'mooie' punten op de grafiek? Wat wordt daarmee bedoeld?
- Waarom is het aflezen van het snijpunt van de grafiek met de verticale T -as erg handig?
- Hoe is in het voorbeeld het hellingsgetal berekend?
- Bereken met behulp van de gevonden formule de temperatuur op 1,5 km hoogte.
- Stel zelf een formule op voor het verband tussen de temperatuur T ($^\circ\text{C}$) en de hoogte h (km) boven de zeespiegel als op $h = 0$ de temperatuur $15\text{ }^\circ\text{C}$ is en op $h = 4$ de temperatuur $-9\text{ }^\circ\text{C}$ is.

Opgave 6

De grafiek van een lineair verband tussen y en x gaat door de punten $A(2,10)$ en $B(5,12)$.

- a Stel een formule op voor y afhankelijk van x .

De grafiek van een lineair verband tussen y en x gaat door de punten $C(-10,120)$ en $D(13,51)$.

- b Stel een formule op voor y afhankelijk van x .

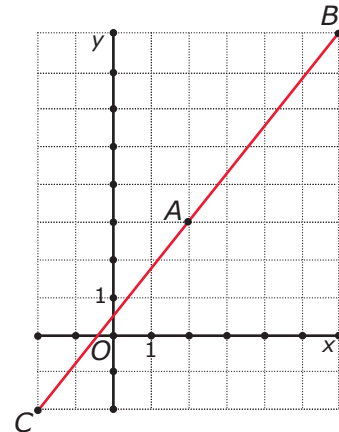
Opgave 7

Je kunt de formule van een lineair verband ook opstellen als het snijpunt van de grafiek met de verticale as niet goed is af te lezen. In de grafiek zie je zo'n situatie. Verschillende punten zijn goed af te lezen, maar het startgetal niet.

- a De punten $A(2,3)$ en $B(6,8)$ liggen op de grafiek. Bereken met behulp van deze twee punten het hellingsgetal van de lijn.

Met behulp van het hellingsgetal kun je vanuit punt A de coördinaten van de punten van de grafiek op andere roosterlijnen berekenen. Ook de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de y -as.

- b Welke y -coördinaat hoort bij $x = 1$?
- c Geef de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de y -as. Wat is het startgetal van de grafiek?
- d Schrijf nu een passende formule voor dit lineaire verband op.
- e Controleer of je formule correct is door het punt $(-2, -2)$ in te vullen.



Figuur 7

Verwerken

Opgave 8

Tegenwoordig hebben veel mensen een smartphone met internet. Voor een telefoonabonnement betaal je daarom naast abonnementskosten en belkosten ook de kosten voor een internetbundel.

Stel je voor dat je € 20,00 abonnementskosten per maand betaalt en dat de belkosten € 0,22 per minuut zijn. Daarnaast betaal je voor de internetbundel van 1000 MB € 10,00.

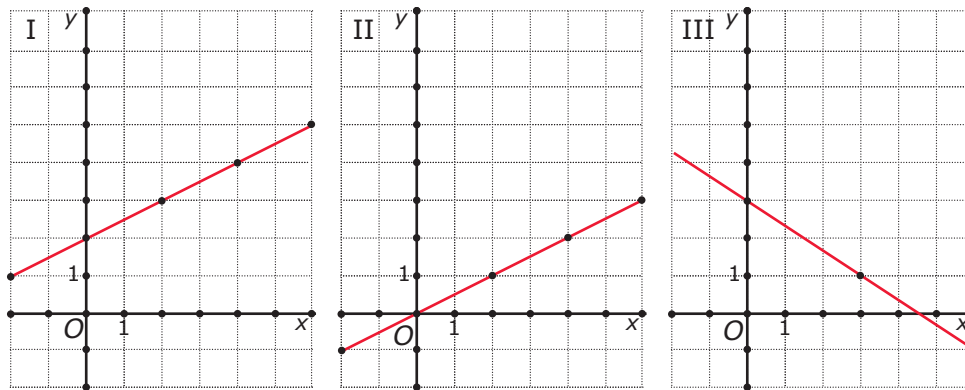
- a Geef een formule voor het verband tussen de totale maandelijkse kosten K en het aantal belminuten m .
- b Maak een tabel bij deze formule.
- c Als je geen internetbundel afsluit, betaal je € 0,05 per verbruikte MB. Stel dat je in een bepaalde maand 240 MB verbruikt. Is het dan goedkoper om een internetbundel af te sluiten of om te betalen per verbruikte MB?

A. internetbundel

B. betalen per verbruikte MB

Opgave 9

Je ziet drie grafieken die elk een verband tussen de variabelen x en y weergeven.



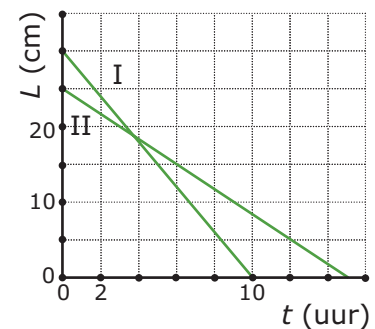
Figuur 8

- Bij welke van deze grafieken is y recht evenredig met x ?
 - grafiek I
 - grafiek II
 - grafiek III
- Wat is bij die grafiek het hellingsgetal?
- Bij welke van deze grafieken is het hellingsgetal negatief?
 - grafiek I
 - grafiek II
 - grafiek III
- Maak bij elke grafiek een formule voor y afhankelijk van x .

Opgave 10

Zuiver cilindervormige kaarsen branden gelijkmatig op. Je ziet de grafieken van de lengte L in centimeters van twee van die kaarsen afhankelijk van de brandtijd t in uren.

- Welke grafiek hoort bij de dikste kaars? Licht je antwoord toe.
 - grafiek I
 - grafiek II
- Waarom is er bij beide grafieken sprake van een lineair verband?
- Stel formules op voor het verband tussen L en t .
- Je steekt beide kaarsen tegelijk aan. Welke kaars is het langst na vier branduren?
 - kaars I
 - kaars II



Figuur 9

Opgave 11

De grafiek van een lineair verband tussen y en x gaat door de punten $A(0,10)$ en $B(5,12)$.

- Stel een formule op voor y afhankelijk van x .
De grafiek van een lineair verband tussen y en x gaat door de punten $A(0,10)$ en $C(5,0)$.
- Stel een formule op voor y afhankelijk van x .

Opgave 12

Voor het verbruik van water betaal je twee soorten kosten:

- een vast bedrag per jaar, het vastrecht
- een bedrag per m^3 water die je verbruikt

Die bedragen kunnen per gebied verschillend zijn, afhankelijk van de leverancier van het water. In de tabel worden twee gebieden vergeleken:

verbruik v (m^3)	0	50	100	150	200
kosten K in gebied A (euro)	36,00	126,00	216,00		
kosten K in gebied B (euro)	48,00	125,50	203,00		

Tabel 4

- In beide gevallen is er sprake van een lineair verband tussen K en v . Leg uit waarom en vul de tabel verder in.
- Uit de tabel kun je afleiden hoeveel je in beide gevallen per m^3 betaalt. Doe dat voor beide gebieden en stel formules op voor K afhankelijk van v .
- Teken de grafieken van K voor beide gebieden in één figuur.
- Bereken de kosten voor een waterverbruik van 120 m^3 in beide gebieden.
- Hoe kun je aan de twee hellingsgetallen zien in welk gebied je het goedkoopste uit bent als je veel water verbruikt?

Opgave 13

Het gewicht van een kabelhaspel hangt af van de lengte van de kabel die er omheen gewonden is. Zo'n grote kabelhaspel bevat nieuw wel 1000 m kabel. Hij weegt dan 800 kg. Als er 200 m kabel af is, weegt de haspel met kabel nog 650 kg.

Hoeveel weegt een lege haspel?



Figuur 10

Opgave 14

Op een vliegveld ligt een horizontale rollooptband die 500 meter lang is.

De rollooptband heeft een snelheid van 4 km/h. Emma en Daan stappen tegelijk op de rollooptband.

Emma loopt met een snelheid van 6 km/h op de band, Daan staat stil op de rollooptband.

Hoeveel meter ligt Emma voor op Daan als ze aan het einde van de rollooptband is?

- 100 m
- 160 m
- 200 m
- 250 m
- 300 m

Toepassen

Veel volwassenen bezitten een auto om zich te verplaatsen. Dat kost geld, niet alleen aan brandstofkosten, maar ook aan wegenbelasting, verzekering, onderhoud en afschrijving. Je wilt een schatting maken van het bedrag dat je daar jaarlijks aan kwijt bent. Gemakkelijk is dat niet want de bedragen voor de verschillende kostenposten veranderen nogal. Je moet daarom aannames doen die zijn gebaseerd op de gegevens van het moment waarop je de berekening gaat uitvoeren. Hier zie je een aantal schattingen op een bepaald moment voor een auto die op benzine rijdt:



Figuur 11

- De prijs van een liter benzine is € 1,68 en je rijdt 12 km op elke liter benzine.
- De wegenbelasting is € 300,00 per jaar.
- De verzekering kost € 200,00 per jaar.
- De kosten voor afschrijving, onderhoud en dergelijke zijn € 1900,00 per jaar.

Maar rijdt de auto bijvoorbeeld op gas, of op diesel, of elektrisch, dan liggen deze bedragen anders. Voor een vergelijkbare auto op diesel zijn op hetzelfde moment dit de schattingen:

- De prijs van een liter diesel is € 1,30 en je rijdt 26 km op elke liter benzine.
- De wegenbelasting is € 1400,00 per jaar.
- De verzekering kost € 200,00 per jaar.
- De kosten voor afschrijving, onderhoud en dergelijke zijn € 2200,00 per jaar.

Deze verschillen spelen een rol als je wilt kiezen tussen rijden op benzine of op diesel.

Opgave 15

In de tekst bij **Toepassen** zie je schattingen van de diverse kosten die je maakt als je in een eigen auto wilt rijden. Ga in deze opgave uit van die gegevens.

- Welke van deze kosten zijn vaste kosten per jaar?
- Hoeveel bedragen de brandstofkosten per kilometer voor de auto op benzine? En voor de auto op diesel?
- Stel voor de auto op benzine een formule op van de totale kosten per jaar (K in euro) afhankelijk van het aantal gereden kilometers per jaar (a in km). Doe dit ook voor de auto die op diesel rijdt.
- Bereken hiermee de kosten voor een jaar waarin de auto ongeveer 18000 km rijdt. Doe dit zowel voor de auto op benzine als die op diesel.
- Maak grafieken bij het verband tussen K en a en bepaal daarmee vanaf hoeveel km per jaar je goedkoper uit bent met een auto die op diesel rijdt.

Opgave 16

Je hebt in de voorgaande opgave het verschil in kosten bekeken van een auto die op benzine rijdt en een auto op diesel. Natuurlijk is het beter als je zelf actuele gegevens zoekt en gebruikt voor de berekening. Je kunt daarbij ook denken aan het vergelijken met een auto op gas of een auto die een elektromotor aan boord heeft.

Houd een vergelijkend onderzoek naar de jaarlijkse kosten van auto's uit dezelfde prijsklasse die op verschillende brandstoffen rijden. Zoek zoveel mogelijk echte gegevens en/of zoek op internet. Kies zelf een prijsklasse.

Testen

Opgave 17

Een taxibedrijf komt voorrijden voor € 3,50. Daarnaast betaal je € 2,25 per gereden km nadat je bent ingestapt.

- a Neem de tabel over en vul in. a is het aantal gereden km en K zijn de totale kosten.

a	0	5	10	15	20
K	3,50				

Tabel 5

- b Geef de formule voor het verband tussen de kosten K en het aantal gereden kilometer a .

Opgave 18

De grafiek van een lineair verband tussen y en x gaat door de punten $A(0,6)$ en $B(5,16)$.

- a Stel een formule op voor y afhankelijk van x .

De grafiek van een lineair verband tussen y en x gaat door de punten $A(0,6)$ en $C(12,0)$.

- b Stel een formule op voor y afhankelijk van x .

De grafiek van een lineair verband tussen y en x gaat door de punten $O(0,0)$ en $B(5,12)$.

- c Stel een formule op voor y afhankelijk van x .

De grafiek van een lineair verband tussen y en x gaat door de punten $A(0,10)$ en $D(5,10)$.

- d Stel een formule op voor y afhankelijk van x .

Practicum: Formule van een lineair verband opstellen


[Bekijk de applet.](#)

Verplaats de twee punten A en B en stel zelf de formule van y afhankelijk van x op. Ga uit van een lineair verband. De juiste formule staat bij de grafiek.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
