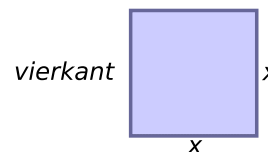


3.2 Variabelen en machten

Inleiding

Je hebt al met formules kennis gemaakt. Daarbij gebruik je variabelen, grootheden waarvan de waarde kan variëren, veranderen. De oppervlakte A van dit vierkant bijvoorbeeld is $A = x \cdot x$. Ook dit wil je natuurlijk korter kunnen schrijven...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met machten als je gelijke variabelen vermenigvuldigt;
- formules herleiden door vermenigvuldigen van factoren, ook als daarbij machten voorkomen.

Voorkennis

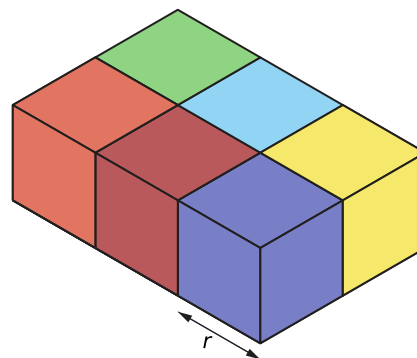
- rekenen, ook met negatieve getallen;
- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- uitdrukkingen herleiden door vermenigvuldigen van factoren en optellen/afrekken van gelijksoortige termen.

Verkennen

Opgave V1

In de afbeelding zie je een balk die bestaat uit zes kubussen. Iedere kubus heeft zijden van r cm.

- Maak een formule waarbij je de inhoud van één kubus kunt berekenen. Noem de inhoud I en de zijden r .
- Maak nu een formule waarbij je de inhoud van de gehele balk berekent. Noem de inhoud weer I en gebruik r , de lengte van de zijden van een kubus.
- Ook de oppervlakte van de balk kun je uitdrukken in r . Hoe groot is de oppervlakte van elk zijvlak van zo'n kubus?
- Hoe groot is de oppervlakte van de bovenkant van de balk? En de voorkant? En de zijkant?
- Maak een berekening van de oppervlakte van de gehele balk, uitgedrukt in r . Vergeet niet de zijkan-ten mee te tellen die je niet ziet. Geef de oppervlakte van de balk aan met A .



Figuur 2

Uitleg

In de afbeelding zie je een balk die bestaat uit zes kubussen. Iedere kubus heeft zijden van r cm.

De inhoud I van zo'n kubus is $I = r \cdot r \cdot r$.

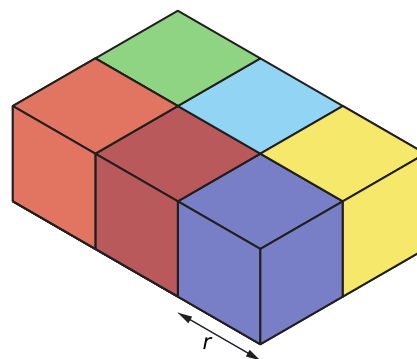
Dat schrijf je als $I = r^3$, spreek uit 'r tot de derde'.

r^3 is de derde macht van r . Als je steeds dezelfde variabelen met elkaar vermenigvuldigt, gebruik je machten.

Zo heeft elk zijvlak van zo'n kubus een oppervlakte $A = r \cdot r = r^2$. Je zegt nu 'r tot de tweede' of 'r kwadraat'.

De inhoud van de hele balk kun je op twee manieren berekenen:

- $I = 6 \cdot r^3 = 6r^3$, want er zijn 6 kubussen
- $I = 3r \cdot 2r \cdot r$, want de balk heeft ribben van $3r$, $2r$ en r .



Figuur 3

Je ziet dat: $l \cdot b \cdot h = 3r \cdot 2r \cdot r = 3 \cdot 2 \cdot r \cdot r \cdot r = 6r^3$.

Je hebt al gezien hoe je uitdrukkingen kunt vereenvoudigen door factoren te vermenigvuldigen en gelijksoortige termen op te tellen. Daar komt nu het werken met machten nog bij.

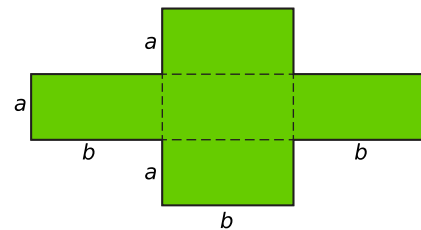
Opgave 1

Bekijk de balk in de **Uitleg**.

- Geef een zo kort mogelijke formule voor de oppervlakte A hiervan.
Je hebt een balk met een lengte van $6p$ een breedte van $4p$ en een hoogte van q .
- Geef een zo kort mogelijke formule voor de inhoud I hiervan.
- Geef een zo kort mogelijke formule voor de oppervlakte A hiervan.

Opgave 2

Stel een zo kort mogelijke formule op voor de omtrek P en de oppervlakte A van de figuur.



Figuur 4

Opgave 3

Herleid.

- $3ab + 4ab$
- $2xy - 4yx + 7xy$
- $-3ab + 4a^2 - 2ab$
- $2x^2 + 5xy - x^2$
- $3x^2 \cdot 4x^2$
- $2x^2 \cdot 5x - x^3$

Opgave 4

Herleid.

- $P = 5p + 3p + 2q + p + 6q$
- $A = p^2 + 5pq + p^2 + qp$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Soms kun je een uitdrukking herleiden. Je schrijft hem dan zo kort mogelijk.

Je kunt formules of uitdrukkingen herleiden door factoren met elkaar te vermenigvuldigen en dan gelijksoortige termen samen te nemen

Als je factoren vermenigvuldigt die dezelfde variabele hebben, werk je met **machten**.

- $a \cdot b = ab$ en $2a \cdot 3b = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b = 6ab$.
- $a \cdot a = a^2$ en $2a \cdot 3a = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a = 6a^2$.
 a^2 is de tweede macht van a ; je zegt 'a tot de tweede (macht)' of **a-kwadraat**. Je zegt ook wel dat a wordt gekwadraterd.
- $a \cdot a \cdot a = a^3$ en $2a \cdot 3a \cdot 5a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot a = 30a^3$.
 a^3 is de derde macht van a ; je zegt 'a tot de derde (macht)'. Je zegt ook wel dat je a tot de derde macht verheft.
- $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$ en $2a^3 \cdot 3a^2 = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = 6a^5$.
 a^5 is de vijfde macht van a ; je zegt 'a tot de vijfde (macht)'. Je zegt ook wel dat je a tot de vijfde macht verheft.

Uiteraard mag je ook andere letters gebruiken.

Weer kun je de gelijksoortige termen optellen of aftrekken:

- $3ab + b^2 + 4ab + b^2 = 3ab + 4ab + b^2 + b^2 = 7ab + 2b^2$
- $-4ab + 3ac - 5ac + 3ab = -4ab + 3ab + 3ac - 5ac = -ab - 2ac$
- $(2a)^3 - 2a^2 \cdot a = 2a \cdot 2a \cdot 2a - 2 \cdot a \cdot a \cdot a = 8a^3 - 2a^3 = 6a^3$

Voorbeeld 1

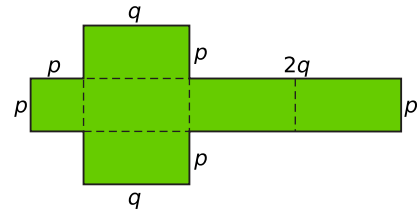
Deze figuur bestaat uit vijf rechthoeken en een vierkant.

Geef een formule voor de oppervlakte A van de figuur.

Antwoord

Voor de oppervlakte A geldt:

$$A = p \cdot p + 3 \cdot p \cdot q + p \cdot 2q = p^2 + 3pq + 2pq = p^2 + 5pq$$



Figuur 5

Opgave 5

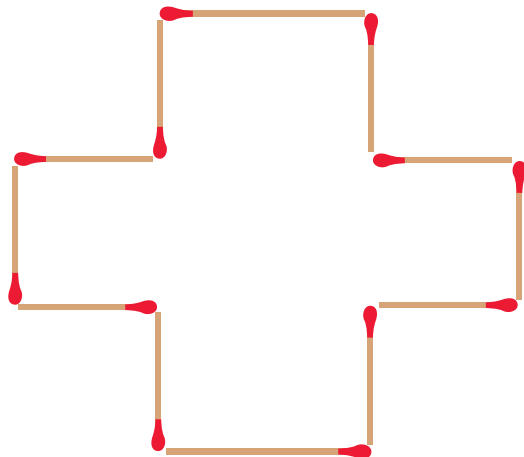
Bekijk de formule voor de figuur uit **Voorbeeld 1**.

- Leg uit hoe je aan de formule voor de oppervlakte kunt komen.
- Neem $p = 5$ en $q = 3$ en bereken de oppervlakte A . Controleer je antwoord met behulp van de figuur.

Opgave 6

Bekijk de luciferfiguur. Neem aan dat alle hoeken recht zijn. Noem de lengte van de korte lucifer k en die van de langere lucifer boven en onder l . Alleen de onderste en de bovenste lucifer zijn lang.

- Geef een zo kort mogelijke formule voor de oppervlakte A van de figuur.
- Bereken A als $k = 3$ cm en $l = 4$ cm met behulp van je formule.



Figuur 6

Voorbeeld 2

Je ziet enkele voorbeelden van het herleiden van uitdrukkingen met variabelen erin.

- $4ab + 2ba = 4ab + 2ab = 6ab$
- $-2t^2 + 3t + t^2 = -2t^2 + t^2 + 3t = -t^2 + 3t$
- $2y \cdot 7y = 2 \cdot 7 \cdot y \cdot y = 14y^2$
- $5z \cdot z^3 = 5 \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z = 5z^4$
- $-4c^2 \cdot -6c^3 = -4 \cdot c \cdot c \cdot -6 \cdot c \cdot c \cdot c = 24 \cdot c^5$
- $(-x)^2 \cdot x^3 = -x \cdot -x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5$

Opgave 7

Herleid of schrijf: 'Kan niet korter.'

- $ab + ba$
- $3a - 2a^2$
- $4a + a^2 - 2a$
- $a + 4ab$
- $a^2 - 2a^2 - ab + 3a$

Opgave 8

Herleid.

- a $3x \cdot 4x^2$
- b $-2x^2 + 3x \cdot x + 5x$
- c $(-z)^3 \cdot -5z^2$
- d $b^2 \cdot b^3 \cdot b$

Opgave 9

Herleid.

- a $4p + 6q - 3p + 12q$
- b $-3p - 4p + 12q + 11p$
- c $15a + 3b - 12a + b - a$
- d $x \cdot 5 + 4y - 4x$
- e $x \cdot x + 4x + 2x \cdot x - 2x$
- f $3u \cdot v - 2v \cdot u + u$

Voorbeeld 3

Van een balk is de breedte vier keer de lengte en de hoogte twee keer de lengte. Noem de lengte van de balk x . Dus:

$$\text{lengte} = x$$

$$\text{breedte} = 4x$$

$$\text{hoogte} = 2x$$

Geef een formule voor de inhoud I en de oppervlakte A van de balk.

Antwoord

$$\text{inhoud balk} = \text{lengte} \cdot \text{breedte} \cdot \text{hoogte}$$

Als je invult wat je weet, krijg je:

$$I = x \cdot 4x \cdot 2x$$

Dit kun je korter opschrijven als:

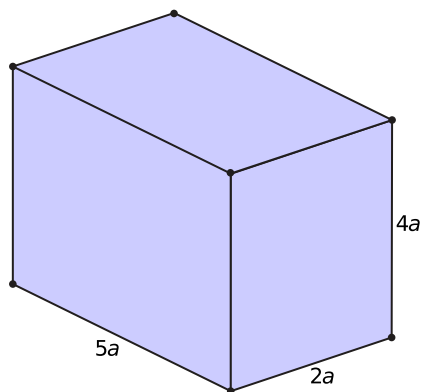
$$I = 4 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x = 8x^3$$

De oppervlakte van de balk vind je door de oppervlakte van alle grensvlakken op te tellen:

$$A = 2 \cdot x \cdot 4x + 2 \cdot x \cdot 2x + 2 \cdot 2x \cdot 4x = 8x^2 + 4x^2 + 16x^2 = 38x^2.$$

Opgave 10

Stel formules op voor de inhoud I en de oppervlakte A van de balk.



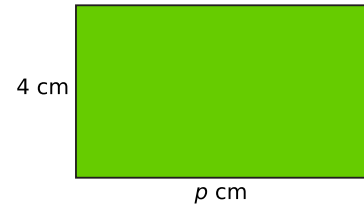
Figuur 7

Verwerken

Opgave 11

Van een rechthoek is de lengte p en de breedte 4.

- Geef de formule voor de oppervlakte A van deze rechthoek.
- Hoe groot is A als $p = 3$?



Figuur 8

Opgave 12

Herleid.

- $ab + 2ab$
- $10xy - 7xy$
- $nm + nm + 2nm$
- $5df - 10df + 7df$

Opgave 13

Herleid.

- $5a \cdot 4a^2$
- $-3p \cdot 2p$
- $3x^4 \cdot 4x^2$
- $g^2 \cdot 2g \cdot 3g$

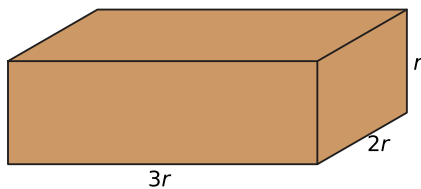
Opgave 14

Herleid. Als je het niet korter kunt schrijven, neem je de uitdrukking over.

- $pt + 3tp - 5p$
- $x^2 + x^2$
- $v^2 + 3v$
- $4u^2 - 2u^2$
- $8z^4 \cdot (-z)^2$
- $8x - 8 \cdot x \cdot (-2x) - 16x^2$

Opgave 15

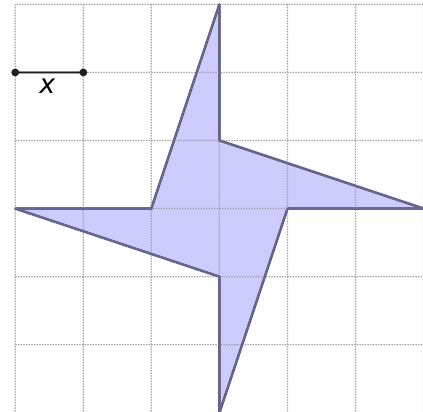
Stel een formule op voor de inhoud I en de oppervlakte A van deze balk.



Figuur 9

Opgave 16

Je ziet een windmolenfiguur. De figuur wordt gevormd door de vier wieken die aan een windmolen zitten. Druk de oppervlakte van de windmolenfiguur uit in x .



Figuur 10

Toepassen

Een fabrikant wil zijn hagelslag verpakken in doosjes met een vierkante bodem.

Voor een doosje gebruikt hij 800 cm^2 karton.

Ga ervan uit dat een doosje precies de vorm van een balk heeft.

De hoogte van zo'n doosje wordt aangegeven met h en de zijde van het grondvlak met x , beide in cm.

Voor het verband tussen h en x geldt de formule: $4xh + 2x^2 = 800$.

Opgave 17

Bekijk hierboven de beschrijving van een bepaald type verpakkingsdoosje.

- Leid zelf de formule die in de tekst wordt gegeven af.
- De verpakkingsmachine laat een maximale breedte van 8 cm toe. Bepaal de waarde van h bij $x = 8$.

Opgave 18

Bekijk de oppervlakteformule van het doosje hagelslag nog eens.

- Welke formule kun je opstellen voor de inhoud I van het doosje?
- Hoeveel cm^3 hagelslag gaat er in het doosje met de maximale breedte van 8 cm?

Testen

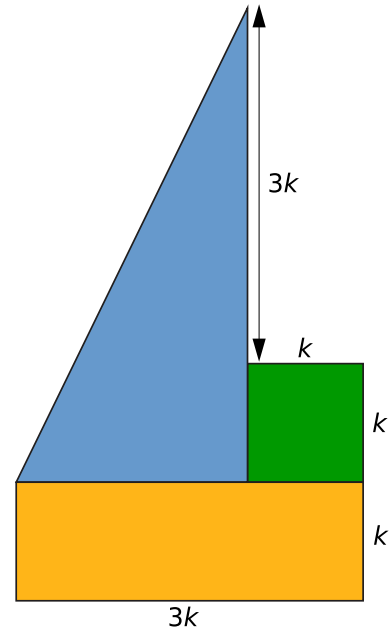
Opgave 19

Herleid.

- $m = 2 \cdot 5t$
- $y = 2x \cdot 3x$
- $s = d \cdot 2d \cdot 3 \cdot 5d$
- $y = -2x^4 \cdot 4x$
- $s = 5x \cdot 3x + 2(-x)^2$
- $c = 5a \cdot 3b + 12ab - b$

Opgave 20

- Neem $k = 2$ en bereken de oppervlakten van de driehoek, het vierkant en de rechthoek.
- Hoe groot is de oppervlakte van de gehele figuur als $k = 2$?
- Geef formules voor de oppervlakte van de rechthoek en het vierkant.
- Doe hetzelfde voor de driehoek.
- Geef de formule voor de oppervlakte A van de hele figuur. Schrijf de formule zo kort mogelijk.
- Neem $k = 2$ en bereken de oppervlakte met behulp van de formule van de gehele figuur. Klopt dit met jouw antwoord bij opgave b?




Figuur 11

Practicum

Met *AlgebraKIT* kun je oefenen met **rekenen met variabelen en machten**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



© 2021

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
