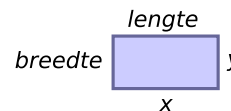


3.1 Rekenen met variabelen

Inleiding

Je hebt al met formules kennis gemaakt. Daarbij gebruik je variabelen, grootheden waarvan de waarde kan variëren, veranderen. De omtrek P van deze rechthoek bijvoorbeeld is $P = x + y + x + y$. Dat wil je natuurlijk korter kunnen schrijven...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- in uitdrukkingen met variabelen termen en factoren herkennen;
- formules herleiden door optellen en aftrekken van gelijksoortige termen;
- de vermenigvuldigingspunt gebruiken en die indien mogelijk weglaten;
- formules herleiden door vermenigvuldigen van factoren.

Voorkennis

- rekenen, ook met negatieve getallen;
- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van grafieken en inklemmen of door handig rekenen.

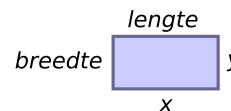
Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een rechthoek met een lengte van x en een breedte van y . Zo'n rechthoek heeft een omtrek P (van 'periferie').

Voor de omtrek geldt: $P = x + y + x + y$.

- Iemand schrijft dit als $P = 2 \cdot x + 2 \cdot y$. Klopt dat ook?
- Hoe kun je deze tweede formule uit de eerste afleiden? Welke rekentechnieken met variabelen pas je toe?
- Kun je een nog kortere formule voor de omtrek maken?
De rechthoek heeft een oppervlakte A (van "area", het Engelse woord voor oppervlakte).
- Welke formule voor de oppervlakte kun je opschrijven?



Figuur 2

Uitleg 1

De formule voor de omtrek van een rechthoek kun je schrijven als:

$P = x + y + x + y$, waarbij de variabelen x de lengte, y de breedte en P de omtrek van de rechthoek voorstellen.

Deze formule kun je korter schrijven, dat noem je herleiden. Hier kun je de uitdrukking $x + y + x + y$ herleiden:

$$x + y + x + y = x + x + y + y = 2 \cdot x + 2 \cdot y, \text{ nog korter } 2x + 2y.$$

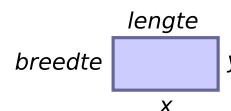
De formule wordt zo $P = 2x + 2y$.

Bij een optelling spreek je van termen: $x + y + x + y$ heeft vier termen, $2x + 2y$ heeft er twee.

Bij een vermenigvuldiging spreek je van factoren: $2x = 2 \cdot x$ heeft twee factoren, 2 en x .

Je kunt formules of uitdrukkingen herleiden door gelijksoortige termen samen te nemen:

- $x + x = 2 \cdot x = 2x$ en $2x + 3x = 2 \cdot x + 3 \cdot x = x + x + x + x + x = 5x$.
Maar $2x + 2y$ kan niet korter, die twee termen zijn niet van dezelfde soort.



Figuur 3

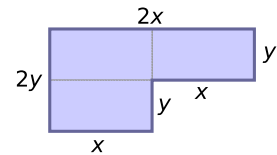
- Zo is $5x - 2x = x + x + x + x + x - x - x = 3x$
- Ook geldt de wisseleigenschap: $x + y = y + x$.
Bij aftrekken mag dit alleen als je het minteken meeneemt: $x - y = -y + x$.
- $1x$ schrijf je korter als x , net zoals $-1x = -x$.

Uiteraard mag je ook andere letters gebruiken, als je maar goed onthoudt wat ze betekenen.

Opgave 1

Je ziet een figuur die uit drie rechthoeken bestaat. De lengte van elke rechthoek is x en de breedte y .

- Welke formule geldt voor de omtrek P van de rechthoek? Schrijf de formule zo kort mogelijk op.
- Moet je ook nog iets afspreken over de gebruikte eenheden van de verschillende variabelen in de formule?



Figuur 4

Opgave 2

Herleid indien mogelijk.

- $4a + 2a$
- $3d + 2t$
- $a + a + 3a$
- $-2a + 3b + 4a + 7b$
- $2b + 3a + b + -2a + b$

Uitleg 2

De formule voor de oppervlakte van een rechthoek kun je schrijven als:

$A = x \cdot y = xy$, waarbij de variabelen x de lengte, y de breedte en A de oppervlakte van de rechthoek voorstellen.

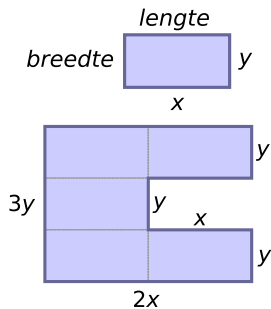
Deze formule kent twee factoren: x en y .

Je kunt dit niet korter schrijven omdat beide variabelen verschillen.

In de onderste figuur zie je hoe je factoren kunt vermenigvuldigen:

- De figuur bestaat uit vijf rechthoeken met dezelfde oppervlakte, dus $A = 5 \cdot xy = 5xy$.
- De figuur is ook een grote rechthoek met een lengte van $2x$ en een breedte van $3y$ minus één rechthoek van x bij y . Dan bereken je de oppervlakte als $A = 2x \cdot 3y - xy$.
- Kennelijk is: $2x \cdot 3y - xy = 2 \cdot x \cdot 3 \cdot y - xy = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y - xy = 6xy - 1xy = 5xy$.

Nu maak je gebruik van de wisseleigenschap van vermenigvuldigen en je ziet hoe je factoren kunt vermenigvuldigen: getallen met elkaar en ongelijke variabelen niet.

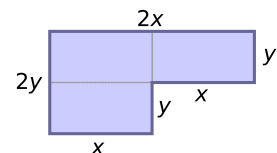


Figuur 5

Opgave 3

Je ziet een figuur die uit drie rechthoeken bestaat. De lengte van elke rechthoek is x en de breedte y .

- Welke formule geldt voor de oppervlakte A van de rechthoek? Schrijf de formule zo kort mogelijk op.
- Je kunt die oppervlakte ook berekenen door van een rechthoek van $2x$ bij $3y$ een rechthoek van x bij y af te trekken. Laat zien, dat je dan toch dezelfde formule voor de oppervlakte krijgt.
- Moet je ook nog iets afspreken over de gebruikte eenheden van de verschillende variabelen in de formule?



Figuur 6

Opgave 4

Waarom kun je $5xy + 2xy$ wel herleiden en $5xy + 2x$ niet?
Maak bij je uitleg ook gebruik van rechthoeken.

Opgave 5

Herleid indien mogelijk.

- a $4ab + 2ab$
- b $3pq + 22$
- c $ab + 5ab - 2ab$
- d $-2ab + 3ba + 4ab + 7ba$
- e $2pq + 3q + pq + -2q + p$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **uitdrukking** met variabelen bestaat uit **termen** en **factoren**:
 $2xy - 5x + 6xy + 7x$ heeft vier termen, namelijk $2xy$, $-5x$, $6xy$ en $7x$.
 $2xy$ heeft drie factoren, namelijk 2 , x en y .

Soms kun je een uitdrukking **herleiden**. Je schrijft hem dan zo kort mogelijk.

Je kunt formules of uitdrukkingen herleiden door **gelijsoortige termen** samen te nemen:

- $a + a = 2 \cdot a = 2a$ en $2a + 3a = 5a$.
Maar $2a + 2b$ kan niet korter; die twee termen zijn niet van dezelfde soort.
- $5ab - 2ba = 5ab + -2ab = 3ab$
- Je gebruikt vaak de wisseleigenschap: $a + b = b + a$ en $ab = a \cdot b = b \cdot a = ba$.
Bij aftrekken mag dit alleen als je het minteken meeneemt: $4 - 3 = -3 + 4$ of met variabelen $a - b = -b + a$.
- $1a$ schrijf je korter als a , net zoals $-1a = -a$.

Uiteraard mag je ook andere letters gebruiken.

Voorbeeld 1

Deze figuur bestaat uit rechthoeken van x bij y .

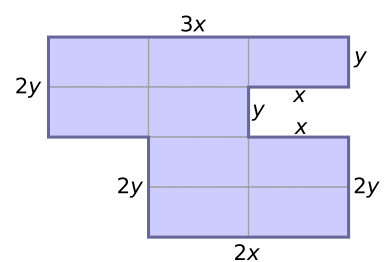
Herleid met behulp van de figuur:

- $2y + x + 2y + 2x + 2y + x + y + x + y + 3y$
- $2x \cdot 2y + 3x \cdot 2y - x \cdot y$
- $3x \cdot 4y - x \cdot 2y - x \cdot y$

Antwoord

De eerste uitdrukking gaat over de omtrek van de figuur, de andere twee over de oppervlakte ervan.

- $2y + x + 2y + 2x + 2y + x + y + x + y + 3y = 8x + 8y$
Gewoon langs de omtrek wandelen en alles bij elkaar tellen: lengtes bij lengtes en breedtes bij breedtes.
- $2x \cdot 2y + 3x \cdot 2y - x \cdot y = 4xy + 6xy - xy = 9xy$
Rechthoek van $2x$ bij $2y$ plus rechthoek van $3x$ bij $2y$ minus één rechthoekje van x bij y .
- $3x \cdot 4y - 2y \cdot x - x \cdot y = 12xy - 2xy - xy = 9xy$
Grote rechthoek van $3x$ bij $2y$ minus rechthoek linksonder van $2y$ bij x en minus één rechthoekje van x bij y .

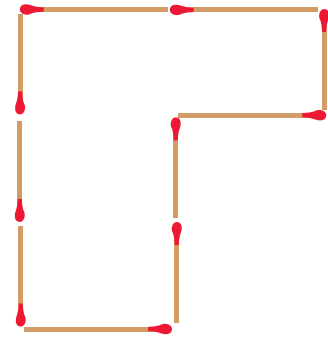


Figuur 7

Opgave 6

Van lange en korte lucifers is een figuur gelegd die uit gelijke rechthoeken bestaat. Noem de lengte van de korte lucifer k en die van de langere lucifer l .

- Stel een formule op voor de omtrek van de figuur en herleid die zo ver mogelijk.
- Geef een zo kort mogelijke formule voor de oppervlakte A van de figuur.
- Leg aan de hand van de figuur uit, dat $2l \cdot 3k - l \cdot 2k = 4kl$.



Figuur 8

Opgave 7

Herleid de volgende uitdrukkingen indien mogelijk.

- $4p + 5q + 8p - 4q + q$
- $4p + 2q + 8p - 4q + r$
- $5p \cdot 3q + q \cdot 2p - 3p \cdot 2q$
- $5p \cdot 3r + q \cdot 2p - 3p \cdot 2q$

Voorbeeld 2

Bekijk de uitdrukkingen:

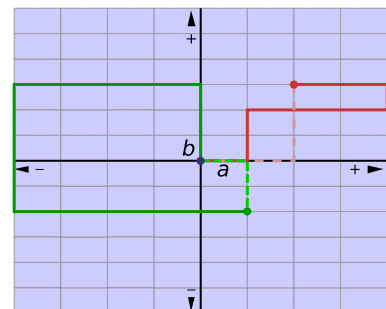
- $a + 2b + 3a + b - 2a$
- $3b - 4a - 5b + a \cdot 5$

Bekijk de applet: slangen

Met een rooster dat bestaat uit rechthoekjes van a breed (in horizontale richting) en b hoog (in verticale richting) kun je het herleiden van de uitdrukkingen zichtbaar maken. Zie figuur.

Ga in de figuur na, dat:

- $a + 2b + 3a + b - 2a = a + 3a - 2a + 2b + b = 2a + 3b$
- $3b - 4a - 5b + a \cdot 5 = -4a + 5a + 3b - 5b = a - 2b$



Figuur 9

Opgave 8

Maak zoals in **Voorbeeld 2** de volgende formules. Bepaal daarna de kortste routes van begin- naar eindpunt. Schrijf de kortste formule op.

- $a + 2b + 3a + b - 2a$
- $3b - 4a - 5b + 5a$
- $-3a + b + 5a - 4b + a$
- $5a + 3b - 2a - 3b - 3a$

Opgave 9

Schrijf zo eenvoudig mogelijk.

- $2a + 4b - a + 3a - 2b$
- $4a - 2a + 3b + a$
- $5p - 3p + 2q + p - 6p$
- $p - 5q + p + q + 2r$

Voorbeeld 3

Schrijf de volgende formules zo kort mogelijk.

Bereken daarna de waarde van K als $a = 5$ en $b = -3$.

- $K_1 = 5a + 4ab + 6a - 3ab$
- $K_2 = ab - 4b + 3ab - 7b$

Antwoord

Eerst herleiden:

- $K_1 = 5a + 4ab + 6a - 3ab = 11a + ab$
- $K_2 = ab - 4b + 3ab - 7b = 4ab - 11b$

Nu $a = 5$ en $b = -3$ substitueren (invullen):

- $K_1 = 11a + ab = 11 \cdot 5 + 5 \cdot (-3) = 55 - 15 = 40$
- $K_2 = 4ab - 11b = 4 \cdot 5 \cdot (-3) - 11 \cdot (-3) = -60 + 33 = -27$

Opgave 10

Bekijk in **Voorbeeld 3** dat je een formule beter eerst kunt herleiden voordat je er waarden in gaat invullen.

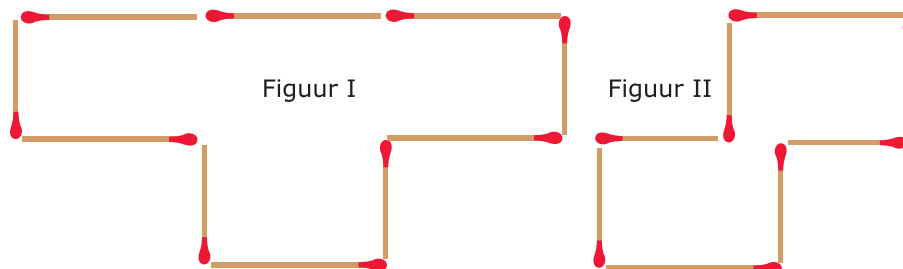
Bereken de waarde van W als $p = 15$ en $q = -5$ in de volgende gevallen.

- a** $W_1 = pq - p + 3pq + 6p$
b $W_1 = 5p - 4q + 12pq - 3p - 5pq$

Verwerken

Opgave 11

Schrijf bij de twee rechthoekige luciferfiguren zo eenvoudig mogelijke formules voor de omtrek P en de oppervlakte A . De lengte van de korte lucifer is p en die van de lange is r .



Figuur 10

Opgave 12

Herleid.

- a** $4p + 6q - 3p + 12q$
b $-3p - 4p + 12q + 11p$
c $15a + 3b - 12a + b - a$
d $x \cdot 5 + 4y - 4x$
e $p + 4q + 2p - 2q$
f $3a + 4b - 6a + 8c$

Opgave 13

Herleid.

- a $2bl + l + bl + 4l + 3bl$
- b $3kl + 2kl + l + 4l - kl$
- c $150a - 12b \cdot 10a + 22a + 3 + 55ab$
- d $-m + 8 + 4 + 9m$

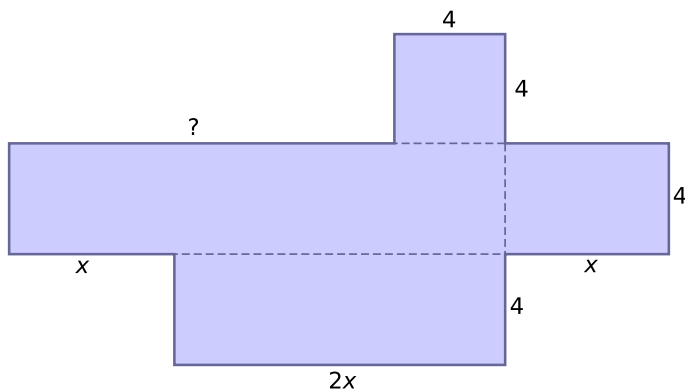
Opgave 14

Neem $p = 5$ en $q = -3$ en bereken R .

- a $R = 12p - 5q + pq - 6p + 5pq$
- b $R = 13p \cdot -2q - 2pq$

Opgave 15

Deze figuur heeft alleen rechte hoeken.



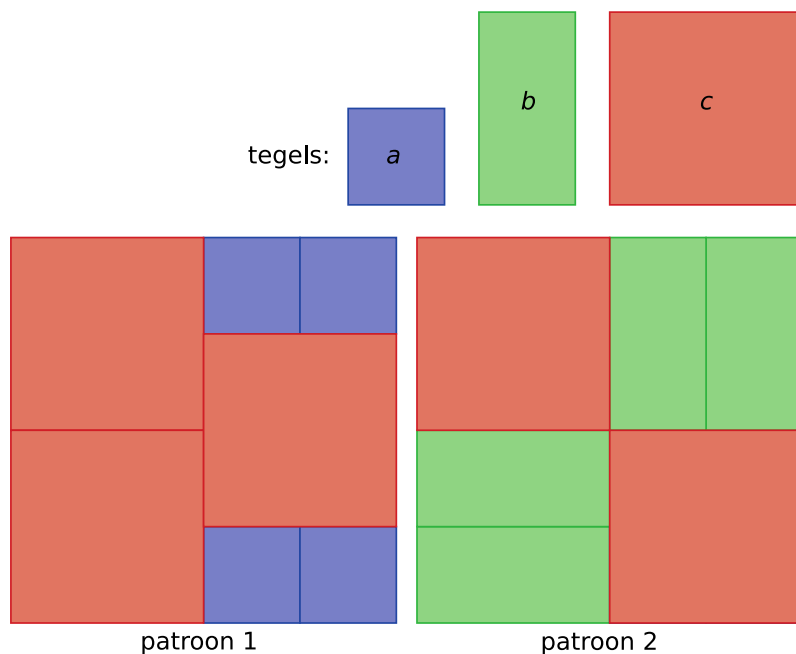
Figuur 11

- a Hoe groot is de lengte van het lijnstuk bij het vraagteken?
- b Geef een zo kort mogelijke formule voor de omtrek P van de figuur.
- c Geef een zo kort mogelijke formule voor de oppervlakte A van de figuur.
- d Neem $x = 6$ cm. Hoe groot zijn dan de omtrek en de oppervlakte van de figuur?

Toepassen

Opgave 16: Tegelpatronen

Een tuindersbedrijf maakt tegelpatronen voor terrassen. Daarvoor gebruiken ze drie typen tegels. De oppervlakte van tegel 1 is a , van tegel 2 b en van tegel 3 c . In de figuren zie je twee tegelpatronen die het bedrijf maakt.



Figuur 12

- a Maak een formule voor oppervlakte A van tegelpatroon 1 en tegelpatroon 2.

Om het werk te versnellen, maakt het bedrijf grotere tegelpatronen door samenstellingen te maken van patroon 1 en patroon 2. Een samenstelling ziet er als volgt uit:

patroon 1	patroon 2	patroon 1
patroon 2	patroon 1	patroon 2
patroon 1	patroon 2	patroon 1

Tabel 1

- b Maak een formule voor de oppervlakte van dit samengestelde tegelpatroon.
De tegel met oppervlakte a kost € 5, die met oppervlakte b kost € 8 en die met oppervlakte c kost € 12.
- c Hoeveel kost dit samengestelde tegelpatroon?

Testen

Opgave 17

Herleid:

- a $2a + 3a$
 b $-2b + 4b - b$
 c $17pq - 20 + 15pq + 21 + 2q$
 d $3k - 6 - 4k + 5$
 e $2,5s + 5s - 7,5s$
 f $3xy - 6y + 8xy + 2y - 7xy$

Opgave 18


Gegeven is de formule $W = 6 + 0,05a + 0,10ab - 0,85a$.

- a Vereenvoudig deze formule.
- b Bereken W als $a = 5$ en $b = 10$

Practicum

Met *AlgebraKIT* kun je oefenen met **rekenen met variabelen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



© 2021

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
