2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Optimaliseren**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- somregel — constante-regel — machtsregel voor gehele positieve n
- samengestelde functie (kettingfunctie) — kettingregel — algemene machtsregel
- productfunctie — productregel
- gebroken functie — quotiëntregel
- modelcyclus — optimaliseren

Activiteitenlijst

- differentiëren met de basisregels
- differentiëren met de kettingregel en de algemene machtsregel
- differentiëren met de productregel
- differentiëren met de quotiëntregel
- toepassingen van differentiaalrekening: optimaliseringsproblemen

Achtergronden

De grootste wiskundige prestatie van de achttiende eeuw was de ontwikkeling van de ‘calculus’, van de ‘analyse’. Daarbij gaat het om differentiaal- en integraalrekening, de functietheorie en alles wat daaruit voortvloeide. De belangrijkste rol daarin werd vervuld door **Leonhard Euler (1707—1783)**. Euler leerde de wiskunde in Basel van **Johann Bernoulli (1667—1748)** en werd in 1773 opvolger van **Daniël Bernoulli (1700—1782, zoon van Johann Bernoulli)** als hoogleraar in St. Petersburg.

Figuur 1 Leonhard Euler

Vooral dankzij een fenomenaal geheugen (hij kende bijvoorbeeld de eerste zes machten van de eerste 100 priemgetallen uit zijn hoofd evenals alle formules uit de trigonometrie en de analyse en een grote hoeveelheid gedichten) kon hij zelfs toen hij volslagen blind was zijn onvoorstelbare productiviteit op het gebied van de wiskunde en de mathematische fysica handhaven. Met ‘Introductio in Analysin Infinitorum’ schreef hij in 1748 het eerste samenhangende werk over analyse. Toch was Euler bepaald geen monomane excentrieke wiskundige, maar vooral een gezinsmens (hij had 13 kinderen waarvoor hij allerlei spelletjes ontwierp).

Lees ook op deze site over **Grafieken en verandering, differentiaalrekening**.

Testen

Opgave 1

Differentieer.

a $f(x) = 2(3x^2 - 6)^8$

b $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

c $h(x) = 4x\sqrt{x^2 + 1}$

d $j(x) = \frac{4x}{x^2 - 1}$

e $k(x) = \frac{x^2+1}{4x}$

f $l(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

Opgave 2

Gegeven is de functie: $f(x) = -x + \sqrt[3]{x}$.

a Bereken met behulp van differentiëren de extremen van f. Rond af op twee decimalen.

b De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$ snijdt de y-as in punt A. Bereken exact de coördinaten van A.

Opgave 3

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{15x}{x^2+36}$.

a Bereken algebraïsch de extremen van f.

b In welke punt(en) is de raaklijn aan de grafiek van f evenwijdig met de lijn $y = \frac{5}{24}x - 5$?

c De lijn $x = p$ met $3 < p < 8$ snijdt de grafiek van f in punt A en de lijn $y = 1$ in punt B. Bereken algebraïsch voor welke waarde van p de lengte van lijnstuk AB maximaal is.

Opgave 4

Een boer wil voor zijn kippen een stuk grond met hekken af zetten. Hij heeft drie hekken van elk vijf meter lang. Deze hekken zet hij in de vorm van een trapezium tegen een grote muur.

Bereken algebraïsch wat de grootst mogelijke oppervlakte is die de boer kan afzetten. Geef je antwoord in m^2. Rond af op twee decimalen.

Opgave 5

Gegeven zijn de functies: $f_p(x) = px(6-2x)^3$ voor verschillende waarden van p.

a Toon aan dat $f'_p(x) = p(6-8x)(6-2x)^2$.

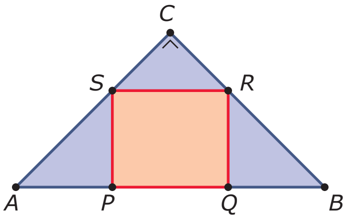
b Voor elke waarde van p met $p \neq 0$ heeft zo'n functie precies één uiterste waarde bij $x = 0{,}75$. Toon dat aan.

c Voor welke p heeft de grafiek van f een extreme waarde van $-273{,}375$?

Opgave 6

In een gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC is AB de basis; $AB = 16$ cm. In deze driehoek wordt rechthoek $PQRS$ beschreven, zie figuur.

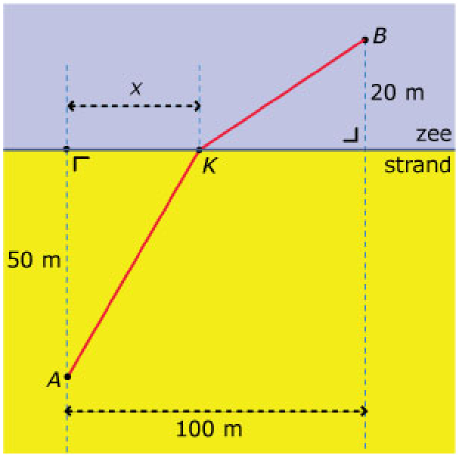
Bereken de maximale oppervlakte die deze rechthoek kan hebben.



Figuur 2

Opgave 7

Een zwemmer is in nood voor de kust van Bergen. De tekening geeft een beeld van de situatie. De zwemmer in nood bevindt zich bij punt B in zee. Een lid van de reddingsbrigade ziet de zwemmer in nood en wil in actie komen. Zij bevindt zich in punt A. Ze wil natuurlijk via de snelste weg naar de drenkeling toe. Maar wat is de snelste weg?
Een deel van de weg moet ze rennend afleggen en een deel zwemmend. Ze rent met een gemiddelde snelheid van 6 m/s en ze zwemt met een gemiddelde snelheid van 1,5 m/s. Hoe kan ze het snelst hulp bieden? Noem het punt waar ze in het water stapt K.
Punt K kan overal langs de aangegeven 100 m-lijn liggen. De tijd die ze nodig heeft om in B te komen moet natuurlijk zo klein mogelijk zijn. Noem de totale tijd t, de gemiddelde snelheid over het strand v_s en de gemiddelde snelheid in zee v_z.



Figuur 3

a Stel een formule op voor t als functie van x.

b Bepaal met behulp van differentiëren de minimale tijd die ze nodig heeft om de zwemmer te bereiken.

c Bepaal de kortste weg.

Toepassen

Opgave 8: File

Als in een min of meer constante stroom auto's met ongeveer dezelfde snelheid wordt geremd, kan er een file ontstaan.

Stel je nu voor dat door werkzaamheden een rijstrook op de snelweg is afgesloten. Bij het invoegen van auto's naar één rijstrook moet vaak onhandig worden gemanoeuvreerd, zodat het verkeer moet afremmen of zelfs stil moet staan. Dit is het moment dat een file ontstaat. Zo'n file is niet nodig als iedereen tijdig de juiste doorstroomsnelheid kiest. Daarbij gaat het erom dat zoveel mogelijk auto's per tijdseenheid de wegversmalling passeren. Neem aan dat alle auto's 4 m lang zijn en hun onderlinge afstand precies de remweg R (in meter) is. Deze remweg hangt af van de snelheid v (in km/h).


Figuur 4

Er geldt bij benadering: $R = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$.

De verkeersdienst zet een teller halverwege de wegversmalling die meet hoeveel auto's er per minuut passeren. Stel nu een formule op voor het aantal auto's dat per minuut de teller passeert.

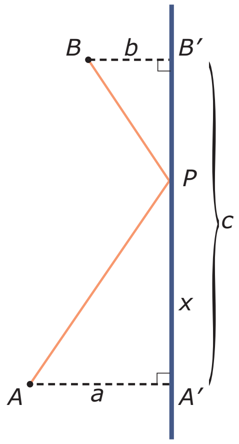
Bereken met behulp van differentiëren bij welke snelheid zoveel mogelijk auto's de teller passeren.

Opgave 9: Spiegel

Dit is een beroemd probleem uit de Griekse Oudheid. Het stamt uit de 'Catoptrica' van Heroon.

"Een lichtstraal loopt van punt naar punt doordat hij van het oppervlak van een vlakke spiegel wordt teruggekaatst. Aangenomen dat het licht altijd de kortste route neemt, waar raakt het dan de spiegel?"

P is het punt waar het licht wordt weerkaatst. De afmetingen zijn verder in de figuur te vinden. De lengte van de lichtstraal (L) is gelijk aan de som van de lengtes van AP en PB. De positie van P is bekend als x is berekend.



Figuur 5

a Stel een formule op voor L als functie van x.

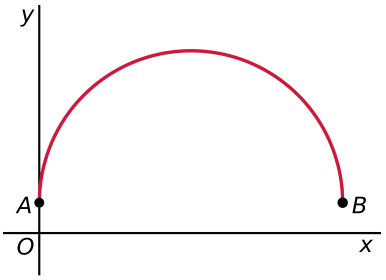
b Neem $a = 2$ dm, $b = 1$ dm en $c = 5$ dm. Bereken met behulp van differentiëren x als L zo klein mogelijk is in twee decimalen nauwkeurig.

c Laat ook zien hoe je dit probleem meetkundig kunt oplossen.

Examen

Opgave 10: Wortelfuncties

Gegeven is de functie $f(x) = 1 + \sqrt{10x - x^2}$.
De grafiek van f heeft de eindpunten A en B. Zie figuur.



Figuur 6

a Los op: $f(x) \geq x$. Rond niet-gehele grenswaarden af op één decimaal.

b Bereken met behulp van differentiëren de helling van de grafiek van f in het punt $P(2,5)$.

Voor elke waarde van a, met $a > 0$, is gegeven de functie $h(x) = 1 + \sqrt{ax - x^2}$.
Als $a = 10$ ontstaat de functie f.

c Het domein van h hangt af van a. Onderzoek voor welke waarde van a het domein van h het interval $[0,100]$ is.

Als je voor enkele waarden van a de grafiek van h tekent, blijkt dat de toppen van deze grafieken op een rechte lijn liggen.

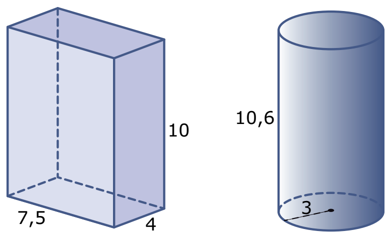
d Geef een vergelijking van deze lijn. Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde B havo 2000, eerste tijdvak)

Opgave 11: Warmtebalans

De temperatuur van een gekoeld pakje of blikje frisdrank stijgt op een zonnig strand snel. Dit heeft verschillende oorzaken. We beperken ons in deze opgave tot de oppervlakte en het volume van de verpakking. Als een verpakking bij dezelfde inhoud een grotere oppervlakte heeft, zal de frisdrank erin sneller opwarmen. Hiervoor is de warmte-uitwisselingsfactor F van belang.

Er geldt: $F = \frac{A}{V}$ waarbij A de totale oppervlakte van de verpakking is in cm^2 en V het volume in cm^3.
We bekijken een balkvormige en een cilindervormige verpakking van frisdrank. In de figuur zijn tevens de afmetingen in cm aangegeven.
Voor de oppervlakte A van de cilinder geldt $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, waarbij h de hoogte is en r de straal van het grondvlak.



Figuur 7

In beide verpakkingen gaat vrijwel dezelfde hoeveelheid frisdrank.
De warmte-uitwisselingsfactor F is verschillend.

a Onderzoek welke verpakking de kleinste F-waarde heeft.

Voor een groot koffiezetapparaat moet een cilindervormige tank worden ontworpen met een inhoud van 8 liter (1 liter = 1000 cm^3). Noem de straal van het grondvlak van deze tank r en de hoogte van deze tank h (r en h in cm).

De hoogte h van de tank kun je uitdrukken in de straal r. Er geldt $h = \frac{8000}{\pi r^2}$. Een eis die men aan het ontwerp van het koffiezetapparaat stelt, is dat de hoogte h tussen 20 cm en 40 cm ligt.

b Bereken welke waarden voor de straal r dan zijn toegestaan. Rond de getallen in je antwoord af op één decimaal.

In plaats van grenzen aan de hoogte te stellen zou men ook de volgende eis kunnen stellen:
'De afmetingen van de tank moeten zodanig zijn dat de koffie er zo lang mogelijk warm in blijft. Dat wordt bereikt als de warmte-uitwisselingsfactor F van de tank zo klein mogelijk is.'
Voor de warmte-uitwisselingsfactor van een cilindervormige tank met een inhoud van 8 liter heeft men de formule $F = \frac{2}{r} + \frac{\pi r^2}{4000}$ gevonden.

c Bereken met behulp van differentiëren de straal van een tank die aan deze eis voldoet. Rond de getallen in je antwoord af op één decimaal.

(bron: examen wiskunde B havo 2006, tweede tijdvak)