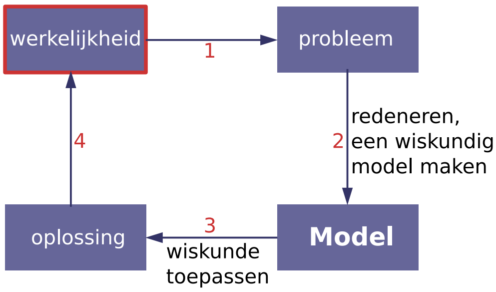
# 2.5 Toepassingen

## Inleiding

Een ‘model’ is een vereenvoudigde weergave van de werkelijkheid.
In de wetenschap wordt veel met modellen gewerkt omdat de werkelijkheid te complex is om zonder meer te beschrijven. Door niet belangrijke details weg te laten (verstandige aannames te doen) kan een model worden opgesteld dat met wiskundige middelen is te beschrijven en door te rekenen. Uit het doorrekenen van het model worden conclusies getrokken die dan weer kunnen worden vergeleken met de realiteit.




Figuur 1

Bij het werken met modellen gaat het vaak om het berekenen van extremen, om ‘optimaliseringsproblemen’. Daarbij wordt het differentiëren toegepast. En er zijn nog andere toepassingen van differentiëren...

**Je leert in dit onderwerp**

- werken met rekenmodellen waarin het differentiëren kan worden toegepast om extremen te berekenen;
- rekenregels voor differentiëren gebruiken om die extremen te berekenen.

**Voorkennis**

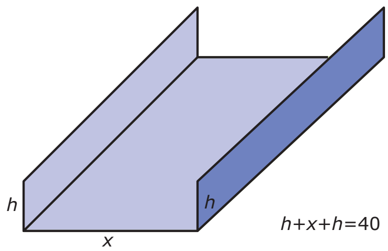
- differentiëren met alle differentieerregels;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

## Verkennen

### Opgave V1

Een Nederlands bedrijf maakt goten voor bevloeiing van akkers in een ontwikkelingsland. Die goten worden gemaakt door vlakke platen kunststof te buigen. Die platen zijn 2 meter lang en 40 centimeter breed. Ze worden zo gebogen dat een goot ontstaat van 2 meter lang met als dwarsdoorsnede (in de breedterichting) een rechthoek.

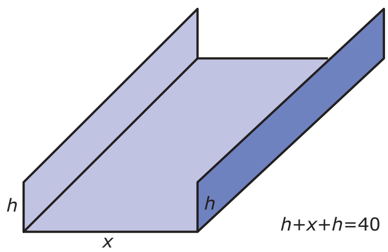
Hoeveel water kan zo'n goot maximaal bevatten?




Figuur 2

## Uitleg

Een Nederlands bedrijf maakt goten voor bevloeiing van akkers in een ontwikkelingsland. Die goten worden gemaakt door vlakke platen kunststof te buigen. Die platen zijn 2 meter lang en 40 centimeter breed. Ze worden zo gebogen dat een goot ontstaat van 2 meter lang met als dwarsdoorsnede (in de breedterichting) een rechthoek. De vraag is hoe je er voor kunt zorgen dat er zoveel mogelijk water in deze goot kan.




Figuur 3

Stel een wiskundig model op:
Neem aan dat elke goot een zuivere balk is en dat de hoeveelheid water die er in past gelijk is aan de inhoud van die balk. De twee bepalende variabelen zijn de breedte $x$ en de hoogte $h$ van de goot. Neem beide in centimeter. De eis is dat de inhoud van de goot maximaal moet zijn.
Voor de inhoud van deze balk geldt: $I = x \cdot 200 \cdot h = 2xh$.
Voor de hoogte van de balk geldt: $h = 20 - 0{,}5x$.
Ga dat na.

Als je in de formule voor $I$ de uitdrukking invult voor $h$, dan geeft dit: $I(x) = 4000x - 100x^2$.

Met behulp van differentiëren of met de grafische rekenmachine vind je dat voor $x = 20$ cm en $h = 10$ cm de totale inhoud maximaal is.

Dit heet optimaliseren; voor een wiskundig model wordt gezocht naar een extreme (maximale of minimale) waarde.

### Opgave 1

Gebruik de gegevens uit de **Uitleg**.

**a** Welke aannames worden er gedaan?

**b** Hoe bepaal je de formule voor de hoogte van de balk?

**c** Laat zien hoe je de formule voor $I(x)$ kunt afleiden.

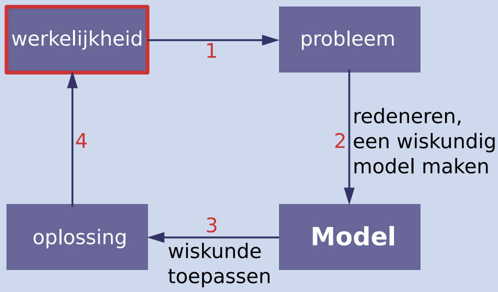
**d** Bepaal de afgeleide van $I(x)$ en bereken de waarde van $x$ waarvoor $I(x)$ maximaal is.

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Een **wiskundig model** is een vereenvoudiging van de werkelijkheid op grond van verstandige aannames.

**Optimaliseren** is het minimaliseren of maximaliseren van een functie in een wiskundig model. Je bepaalt de maximale of de minimale oplossing. Je doet dit met behulp van differentiëren of met de grafische rekenmachine. Bij differentiëren gebruik je de differentieerregels.




**Figuur 4**

### Voorbeeld 1

Een fabriek maakt kartonnen pakken voor vruchtensap in de vorm van een balk met een vierkant grondvlak. Het pak heeft een inhoud van 1,5 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat er zo min mogelijk karton wordt gebruikt, dan blijven de kosten namelijk laag.
Wat zijn de optimale afmetingen van het pak?

Antwoord

Stel een wiskundig model op. Neem aan dat elk pak een zuivere balk is met een vierkant grondvlak en dat de benodigde hoeveelheid karton gelijk is aan de totale oppervlakte van het pak. De twee bepalende variabelen zijn de breedte van het grondvlak $b$ en de hoogte $h$. Neem beide in centimeter. Gegeven is de inhoud van een pak (1,5 L = 1500 cm$^3$), de eis is dat de oppervlakte minimaal moet zijn.
Voor de inhoud van de balk geldt: $I = b^2h$.
Voor de oppervlakte van de balk geldt: $A = 2b^2 + 4bh$.

Met $I = 1500$ vind je $b^2 h = 1500$ en dus: $h = \frac{1500}{b^2}$.

Vul in de formule voor $A$ deze uitdrukking in voor $h$. Dit geeft: $A(b) = 2b^2 + \frac{6000}{b}$.

Met behulp van differentiëren of de grafische rekenmachine vind je dat voor $b \approx 11{,}45$ cm en $h \approx 11{,}47$ cm de totale oppervlakte minimaal is.

## Opgave 2

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

**a** Hoe kom je aan de formule voor de oppervlakte van het pak?

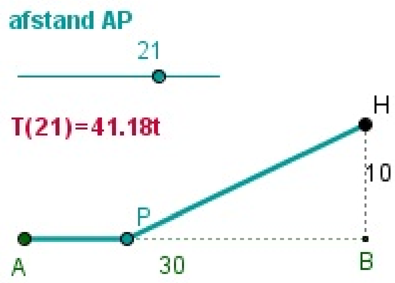
**b** Laat zien hoe je de formule voor $A(b)$ kunt afleiden.

**c** Bepaal de afgeleide van $A(b)$ en bereken met behulp daarvan de waarde van $b$ waarvoor $A(b)$ minimaal is.

## Voorbeeld 2

**Bekijk de applet: leidingaanleg**

Bekijk de figuur. Vanuit het aansluitingspunt $A$ moet naar punt $H$ van een woonhuis een nieuwe leiding worden gegraven. Het graven en weer dichtmaken van een sleuf in de tuin kost 1,5 keer zo veel tijd als datzelfde werk langs de wegkant $AB$. Hoe moet er worden gegraven om alles zo snel mogelijk te doen?



Figuur 5

Antwoord

Neem $x$ voor de lengte van $BP$.

Ga na dat dan $30 - x$ de lengte van $AP$ en $\sqrt{x^2 + 100}$ de lengte van $PH$ is.

Als $t$ de benodigde tijd per meter langs de weg is, is $1{,}5t$ de benodigde tijd per meter door de tuin.

De totale benodigde tijd $T$ is daarom: $T(x) = t(30 - x) + 1{,}5t\sqrt{x^2 + 100}$.
Bepaal de waarde van $x$ waarvoor $T$ maximaal is door de afgeleide gelijk te stellen aan 0.

$T(x) = t\left(30 - x + 1{,}5\sqrt{x^2 + 100}\right)$ geeft $T'(x) = t\left(-1 + \frac{1{,}5x}{\sqrt{x^2+100}}\right)$.

$$\begin{aligned} T'(x) = t\left(-1 + \frac{1{,}5x}{\sqrt{x^2+100}}\right) &= 0 \\ -1 + \frac{1{,}5x}{\sqrt{x^2+100}} &= 0 \\ \sqrt{x^2 + 100} &= 1{,}5x \\ 1{,}25x^2 &= 100 \\ x &= \sqrt{80} \approx 8{,}94 \end{aligned}$$

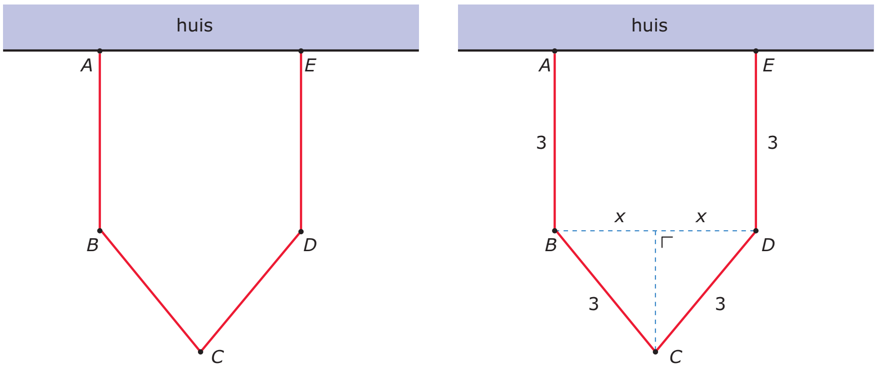
Er moet 21,06 meter langs de wegkant worden gegraven en vandaar rechtstreeks door de tuin naar het woonhuis.

## Opgave 3

Bekijk de gegevens uit **Voorbeeld 2**. Ga nu uit van de situatie waarin de benodigde tijd om door de tuin te gaan $2t$ is in plaats van $1{,}5t$. Bepaal hoe de leiding gelegd moet worden, zodat het zo snel mogelijk verloopt.

## Opgave 4

Iemand wil een serre aan zijn huis bouwen met vier even grote rechthoekige kozijnen. Elk kozijn is 2,5 meter hoog en 3 meter breed. Hij bestudeert de mogelijke opstellingen waarbij twee kozijnen $AB$ en $DE$ loodrecht op de muur worden bevestigd. De andere twee $BC$ en $CD$ worden zo geplaatst dat de vloeroppervlakte van de serre maximaal wordt.




**Figuur 6**

**a** Stel een formule op voor de vloeroppervlakte $A(x)$ (m$^2$) van de serre.

**b** Bepaal $A'(x)$. Geef aan welke differentieerregels je gebruikt.

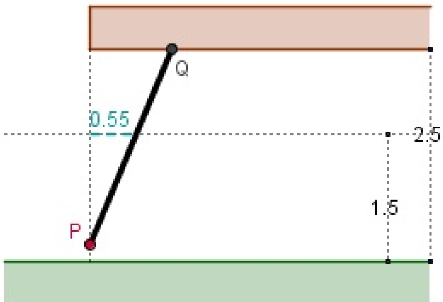
**c** Voor welke $x$ is de vloeroppervlakte maximaal?

**d** Hoe groot is de maximale vloeroppervlakte ongeveer?

## Voorbeeld 3

**Bekijk de applet: garagedeur**

Je ziet hier een dwarsdoorsnede van een garage met een garagedeur (in figuur $PQ$). Bij het openen van de deur gaat de onderkant recht omhoog, terwijl de bovenkant langs het plafond horizontaal naar binnen gaat. Binnen in de garage moet dus voldoende ruimte zijn om te zorgen dat een auto niet beschadigd raakt door de naar binnen komende deur. De garagedeur is 2,50 m hoog en je auto is 1,50 m hoog. Hoe ver komt de deur op die hoogte van 1,50 m maximaal naar binnen?




**Figuur 7**

Antwoord

Noem de afstand van $P$ tot het plafond $x$ en de afstand die de deur op een hoogte van 1,50 m naar binnen komt $A$, beide in m. Je kunt dan met behulp van gelijkvormige rechthoekige driehoeken afleiden:

$$A(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\sqrt{2{,}5^2 - x^2}$$

Door $A'(x) = 0$ op te lossen vind je: $x \approx 1{,}84$ m.
En omdat $A(1{,}84) \approx 0{,}77$ m, komt de garagedeur op een hoogte van 1,50 m zo'n 77 cm naar binnen.

## Opgave 5

Bekijk het probleem in **Voorbeeld 3**.

**a** Probeer eerst om (zonder naar het antwoord te kijken) zelf een oplossing te vinden.

**b** Bekijk nu de oplossing die wordt gegeven. Als je zelf een andere of geen oplossing hebt gevonden, probeer dan zelf de formule voor $A(x)$ af te leiden.

**c** Bereken met behulp van differentiëren voor welke $x$ de waarde van $A$ maximaal is.

## Voorbeeld 4

Gegeven zijn de functies $f(x) = 4 - x$ en $g(x) = \frac{5}{x+2}$.
De lijn $x = p$ met $-1 < p < 3$ snijdt de grafieken van deze functies in de punten $A$ en $B$.

Voor welke exacte waarde van $p$ is de lengte van lijnstuk $AB$ maximaal?

Antwoord

De lengte van $AB$ is $L(p) = 4 - p - \frac{5}{p+2}$.

$L'(p) = -1 + \frac{5}{(p+1)^2} = 0$ geeft $(p+1)^2 = 5$ en $p = \sqrt{5} - 1 \vee p = -1 - \sqrt{5}$ (vervalt).

Met behulp van de grafiek of een tekenschema zie je dat je te maken hebt met een maximum.

De lengte $AB$ is maximaal als $p = \sqrt{5} - 1$.

### Opgave 6

Gegeven zijn de functies $f(x) = x - 4$ en $g(x) = \frac{1}{8}(0{,}5x - 2)^5$.

De lijn $x = p$ met $4 < p < 8$ snijdt de grafieken van deze functies in de punten $C$ en $D$.

Voor welke waarde van $p$ is de lengte van lijnstuk $CD$ maximaal? Rond af op twee decimalen.

### Opgave 7

Gegeven zijn de functies $f$ en $g$ door $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sqrt{x}$.
De lijn $x = p$ met $0 < p < 1$ snijdt de grafieken in de punten $A$ en $B$.

Voor welke waarde van $p$ is de lengte van lijnstuk $AB$ maximaal?

### Opgave 8

Lijn $x = p$ met $0 < p < 2$ snijdt de $x$-as in punt $A$ en de grafiek van $f(x) = 4 - x^2$ in punt $B$. Bereken exact wat de grootst mogelijke oppervlakte van rechthoek $ABCD$ is waarbij punt $C$ op de grafiek van $f$ ligt en punt $D$ op de $x$-as.

## Verwerken

### Opgave 9

Op rechthoekige vellen papier van 1 $m^2$ worden foto's afgedrukt om posters te maken. Om de foto blijft een rand wit: aan de onderkant een strook van 2 dm breedte, aan de andere drie randen stroken van 1 dm breedte.
Bij welke afmetingen van de poster wordt de oppervlakte van het bedrukte deel zo groot mogelijk?

**a** Maak zelf een schets van de situatie met de gegevens er in.

**b** Probeer eerst zelf het probleem op te lossen. Kijk pas als dat niet lukt naar c en d.

**c** Neem aan dat de breedte van zo'n poster wordt voorgesteld door $x$ dm. Leid een formule af voor de oppervlakte $A$ van het bedrukte deel als functie van $x$.

**d** Bereken met behulp van differentiëren de waarde van $x$ waarvoor $A(x)$ maximaal is.

**e** Beantwoord tenslotte de aan het begin gestelde vraag.

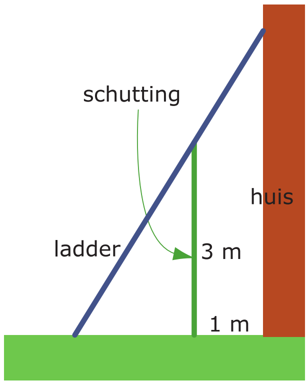
## Opgave 10

Hoe lang zijn de zijden van de gelijkbenige driehoek met de grootste oppervlakte die een omtrek heeft van 20 cm?

## Opgave 11

Iemand wil een ladder kopen om zijn dakgoten schoon te maken. Vlak naast zijn huis op 1 m van de muur staat echter een schutting van 3 m hoog.

Hoe lang moet een ladder minstens zijn om over de schutting tegen de muur van het huis te komen?
(Ga er van uit dat zowel de muur van het huis als de schutting loodrecht op de vlakke grond staan.)




**Figuur 8**

## Opgave 12

In een rechthoekig $Oxy$-assenstelsel snijdt lijn $x = p$ met $p > 0$ de grafiek van $f(x) = 4 - x^2$ in punt $P$.

**a** Bereken de minimale waarde die lijnstuk $OP$ kan aannemen.

Neem nu aan dat $0 < p < 2$. De lijn $x = p$ snijdt de $x$-as in $A$ en van de rechthoek $APQB$ liggen de punten $P$ en $Q$ op de grafiek van $f$ en ligt punt $B$ ook op de $x$-as.

**b** Bereken de maximale waarde die de oppervlakte van rechthoek $APQB$ kan aannemen.

## Opgave 13

Bekijk de grafiek van de functie $f$ met $f(x) = \sqrt{10-2x}$ op het domein [0,5]. De lijn $x = k$ (met $0 < k < 5$) snijdt de $x$-as in punt $A$ en de grafiek van $f$ in punt $B$.

**a** Toon aan dat de oppervlakte $A$ van rechthoek $OABC$ gelijk is aan: $A(k) = k\sqrt{10-2k}$.

**b** Bepaal met behulp van differentiëren voor welke $k$ de oppervlakte van rechthoek $OABC$ zo groot mogelijk is.

## Opgave 14

Gegeven is de familie van functies $f_p$ door $f_p(x) = \frac{x^2+p}{x}$.

**a** Bereken algebraïsch de extremen van $f_p$ als $p = 1$.

**b** Voor welke waarden van $p$ heeft $f_p$ geen extremen?

**c** Voor welke waarden van $p$ heeft de raaklijn aan de grafiek van $f$ voor $x = 2$ een richtingscoëfficiënt van -1?

# Testen

## Opgave 15

Gegeven is de functie $f$ met $f(x) = \left(x^2 - x\right)^4$.

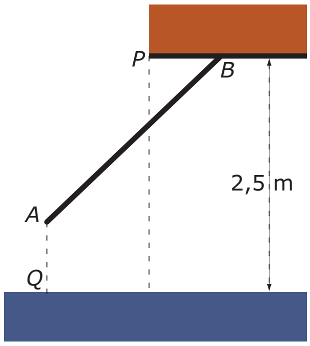
**a** Bereken exact de extremen van $f$.

**b** De lijn met vergelijking $x = k$ met $0 < k < 1$ snijdt de $x$-as in punt $A$ en de grafiek van $f$ in punt $B$. Voor welke exacte waarde van $k$ is de oppervlakte van $\Delta OAB$ maximaal?

## Opgave 16

Bekijk de figuur van een bewegende garagedeur. De hoogte van punt $A$ (de onderkant van de deur) boven de grond is in elke stand even groot als de lengte van $PB$.

Bereken algebraïsch hoe ver de onderkant van de deur maximaal naar buiten komt. Geef je antwoord in meter. Rond af op twee decimalen.




Figuur 9