2.4 De quotiëntregel

Inleiding

Als je twee functievoorschriften $f(x)$ en $g(x)$ deelt, krijg je een nieuwe functie die de quotiëntfunctie van f en g heet. Soms kun je die quotiënten uitwerken, maar meestal niet.

Daarom moet je een differentieerregel hebben voor quotiëntfuncties $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Je leert in dit onderwerp

- de regel voor het differentiëren van quotiëntfuncties;
- alle differentieerregels door elkaar gebruiken en toepassen.

Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel, de somregel, de kettingregel en de productregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Een gebroken functie (quotiëntfunctie) heeft de vorm $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$.

a Laat met een voorbeeld zien dat in het algemeen NIET geldt: $f'(x) = \frac{t'(x)}{n'(x)}$.

b Hoe bepaal je de afgeleide van $f(x) = \frac{1}{x}$?

Je kunt de functie $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ schrijven als $f(x) = t(x) \cdot (n(x))^{-1}$.

c Bepaal nu met behulp van de productregel en de kettingregel de afgeleide van f.

Uitleg

Als een deling niet uitkomt, blijft er een breuk over. Ook bij functies kan dit voorkomen:

- $f(x) = \frac{3x^5}{2x^2}$ is een deling van $t(x) = 3x^5$ en $n(x) = 2x^2$. Deze deling is echter te vereenvoudigen (mits $x \neq 0$) tot $f(x) = 1{,}5x^3$.
- $g(x) = \frac{x^2}{x-1}$ is een deling van $t(x) = x^2$ en $n(x) = x-1$ die niet te herleiden is tot een machtsfunctie. Er blijft altijd een vorm met een gebroken functie over.

Een functie die bestaat uit een deling (quotiënt) van twee functies heet een quotiëntfunctie.
Functie f kun je na de vereenvoudiging differentiëren.
Bij functie g ligt dat anders. Je kunt zo de afgeleide bepalen:

- Schrijf de functie als: $g(x) = x^2 \cdot (x-1)^{-1}$.
- Pas de productregel en kettingregel toe:

  $g'(x) = 2x \cdot (x-1)^{-1} + x^2 \cdot -1(x-1)^{-2} = \frac{2x}{x-1} - \frac{x^2}{(x-1)^2}$

Je kunt een gebroken functie differentiëren. Je krijgt een vorm met twee breuken. Die kun je gelijknamig maken en optellen:

$g'(x) = \frac{2x}{x-1} - \frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}$

Het kan sneller met de volgende regel:

Als $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ dan is $f'(x) = \frac{t'(x) \cdot n(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$

Dit is de quotiëntregel. Je kunt die regel zelf vinden door $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)} = t(x) \cdot (n(x))^{-1}$ te schrijven en daarop de productregel toe te passen. Een mooie puzzel...

Opgave 1

Gegeven is: $g(x) = \frac{t(x)}{n(x)} = \frac{x^2}{x-1}$.

a Bepaal de afgeleide van $t(x)$ en $n(x)$.

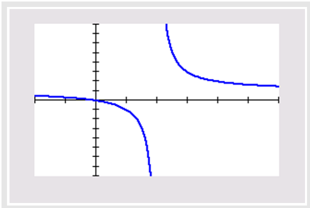
b Bereken de afgeleide met de quotiëntregel en herleid hem zo ver mogelijk.
Krijg je hetzelfde als met de productregel en de kettingregel?

Opgave 2

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = \frac{x}{x-2}$. Dit is een quotiëntfunctie.

a Wat is de teller en wat de noemer van deze functie?

b Herschrijf de functie en bepaal de afgeleide met de productregel en de kettingregel.



Figuur 1

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de afgeleide van een quotiënt van twee functies geldt de **quotiëntregel**:

Als $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (met $g(x) \neq 0$) dan is $Q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

De functie f is de teller van de breuk, de functie g is de noemer van de breuk.

Deze differentieerregel is niet altijd nodig, soms kun je een deling vereenvoudigen.
De quotiëntregel komt vaak in combinatie met andere differentieerregels voor. Met name in combinatie met de kettingregel.

Voorbeeld 1

Differentieer $g(x) = \frac{2x^2}{x-4}$ met behulp van de quotiëntregel.

Antwoord

Bekijk eerst de teller en de noemer afzonderlijk:

- $t(x) = 2x^2$ met $t'(x) = 4x$.
- $n(x) = x - 4$ met $n'(x) = 1$.

Dus: $g'(x) = \frac{4x \cdot (x-4) - 2x^2 \cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{2x^2 - 16x}{(x-4)^2}$.

Opgave 3

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = \frac{x}{x-2}$ uit de vorige opgave nog eens. Je hebt de afgeleide bepaald met behulp van de productregel en de kettingregel. In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de quotiëntregel voor differentiëren kunt gebruiken om van dergelijke functies de afgeleide te bepalen.

a Bepaal de afgeleide van f met de quotiëntregel.

b De afgeleide bij de vorige opgave en die bij deze opgave zouden natuurlijk hetzelfde moeten zijn. Ga na dat dit inderdaad zo is.

Opgave 4

Gegeven is de functie f door $f(x) = \frac{x+1}{x}$.

a Bepaal van deze functie de afgeleide met behulp van de quotiëntregel.

b Bepaal de afgeleide zonder de quotiëntregel toe te passen.

Opgave 5

Differentieer $g(x) = \frac{3x^2}{2x-1}$ met behulp van de quotiëntregel.

Voorbeeld 2

Differentieer de functie $f(x) = \frac{5x-10}{\sqrt{4+x^2}}$.

Antwoord

Noem de teller $t(x)$ en de noemer $n(x)$ en pas de quotiëntregel toe:

- $t(x) = 5x - 10$ met $t'(x) = 5$.
- $n(x) = \sqrt{4 + x^2} = \left(4 + x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ met $n'(x) = \frac{1}{2}\left(4 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$.

Dus: $f'(x) = \dfrac{5\cdot\sqrt{4+x^2} - (5x-10)\cdot\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}}{\left(\sqrt{4+x^2}\right)^2}$.

Vermenigvuldig teller en noemer met $\sqrt{4 + x^2}$ om de breuk uit de teller te halen:

$$f'(x) = \frac{5\cdot(4+x^2)-(5x-10)\cdot x}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} = \frac{20+10x}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$$

Opgave 6

Differentieer de functies. Gebruik de handigste manier om te differentiëren.

a $f(x) = \frac{3x^2-4}{2x+1}$

b $f(x) = \frac{4}{(x-2)^2}$

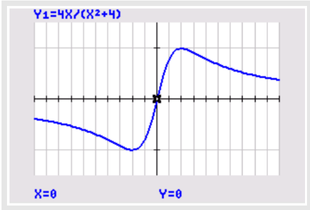
c $f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{4+x^2}}$

d $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

Voorbeeld 3

Bekijk de grafiek van $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$.

Er zijn twee extremen. Bereken die met behulp van de afgeleide van f.



Figuur 2

Antwoord

De afgeleide is: $f'(x) = \frac{4 \cdot (x^2+4) - 4x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}$.

Los de vergelijking $f'(x) = 0$ op. Een breuk kan alleen op 0 uitkomen als de teller 0 is (en de noemer niet).

Dit betekent dat $-4x^2 + 16 = 0$.

De oplossing van deze vergelijking is: $x = -2 \vee x = 2$ (de noemer wordt bij die waarden niet 0).

De extremen zijn: max. $f(2) = 1$ en min. $f(-2) = -1$.

Opgave 7

Gegeven is de functie $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Bereken de extremen van f met behulp van de afgeleide.

Opgave 8

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{x^3}{1+x^4}$.

a Bereken de extremen van f met behulp van differentiëren. Geef benaderingen in twee decimalen.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

Verwerken

Opgave 9

Differentieer.

a $f(x) = \frac{x+1}{x^2-16x}$

b $g(x) = \frac{1}{x^2-4x+5}$

c $h(x) = \frac{2x^3-10x^2+60x+120}{x}$

d $j(x) = \frac{2x}{x^2-10}$

e $k(x) = \frac{-4}{1-3x^2}$

f $l(x) = 200x + 400 + \frac{2000}{x}$

Opgave 10

Gegeven is functie: $f(x) = \frac{3x}{x^2+2}$.

a Bereken exact de extremen van f.

b Stel exact de formule op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

Opgave 11

Differentieer.

a $H(t) = \frac{\sqrt{2t+6}}{3t}$

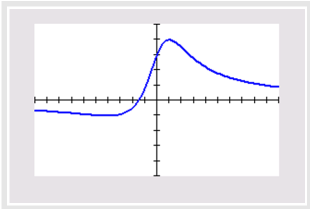
b $I(x) = \frac{2\pi x-5}{\pi^2-3x^2}$

c $A(r) = \frac{2r}{\sqrt{4r+8}}$

d $T(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

Opgave 12

Bekijk de grafiek van functie f. Het functievoorschrift is $f(x) = \frac{8x+12}{x^2+4}$.



Figuur 3

a Bereken algebraïsch de extreme waarden van f.

b Los exact op: $f(x) < \frac{3}{2}$.

c De grafiek van f snijdt de x-as in punt A en de y-as in punt B. Laat zien dat de lijn AB de raaklijn aan de grafiek van f is in punt B.

Opgave 13

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{(x+3)^3}{3x^2}$

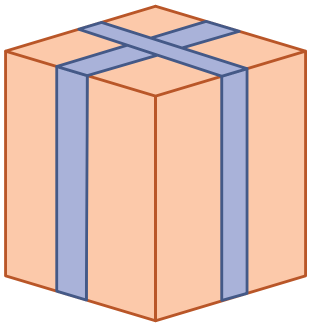
a Toon aan dat $f'(x) = \frac{(x-6)(x+3)^2}{3x^3}$.

b Bereken algebraïsch het (lokale) minimum van f.

Toepassen

Opgave 14: Verpakking

De afdeling Verpakking van een bedrijf heeft de opdracht gekregen balkvormige doosjes te maken waarvan de lengte vier keer zo groot is als de breedte. Om elke doos worden twee zijden sierlinten aangebracht zoals je in de tekening ziet. De inhoud van de doosjes moet 1 liter zijn. Het bedrijf wil het verbruik van het sierlint zo klein mogelijk houden.



Figuur 4

a Stel een formule op voor de lengte L van het benodigde sierlint als functie van de breedte x van de doos.

b Bereken met behulp van differentiëren bij welke afmetingen van het doosje de lengte van het sierlint zo klein mogelijk is. Geef je antwoord in millimeter nauwkeurig.

Opgave 15: Gelijkstroomcircuit

Een gelijkstroomcircuit bestaat uit een 12 volts batterij met een inwendige weerstand van 12 ohm en een variabele weerstand van R (ohm). Het vermogen P (in watt) dat door dit circuit wordt opgewekt, wordt gegeven door $P = RI^2$. De stroomsterkte I wordt daarin gegeven door $I = \frac{12}{R+12}$.

a Druk het ontwikkelde vermogen uit in R, de variabele weerstand.

b Bereken het maximaal ontwikkelde vermogen met behulp van differentiëren.

Testen

Opgave 16

Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = \frac{2x+5}{1-x}$

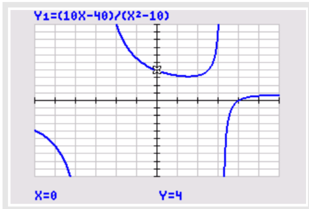
b $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}$

c $H(t) = \frac{1}{1+\frac{1}{t}}$

d $y(x) = \frac{x^4+1}{(1+x^2)^4}$

Opgave 17

Je ziet hier een deel van de grafiek van de functie $f(x) = \frac{10x-40}{x^2-10}$.



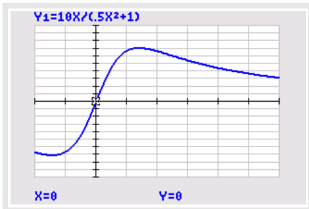
Figuur 5

a Bereken met behulp van de afgeleide de extremen van f in twee decimalen nauwkeurig.

b Het punt (0,4) ligt op de grafiek van f. Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in dat punt.

Opgave 18

Dit is een deel van de grafiek van $f(x) = \frac{10x}{0{,}5x^2+1}$.



Figuur 6

a Bereken exact de twee extremen van functie f.

b Bepaal de grootste waarde die de richtingscoëfficiënt van een raaklijn in een punt van de grafiek van f kan hebben.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met alle differentieerregels**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.