2.3 De productregel

Inleiding

Als je twee functievoorschriften $f(x)$ en $g(x)$ vermenigvuldigt, krijg je een nieuwe functie die de productfunctie van f en g heet. Vaak kun je die producten uitwerken, maar niet altijd. En soms is dit gewoon te bewerkelijk.
Daarom moet je een differentieerregel hebben voor productfuncties $f(x) \cdot g(x)$.

Je leert in dit onderwerp

- productfuncties differentiëren met de productregel.

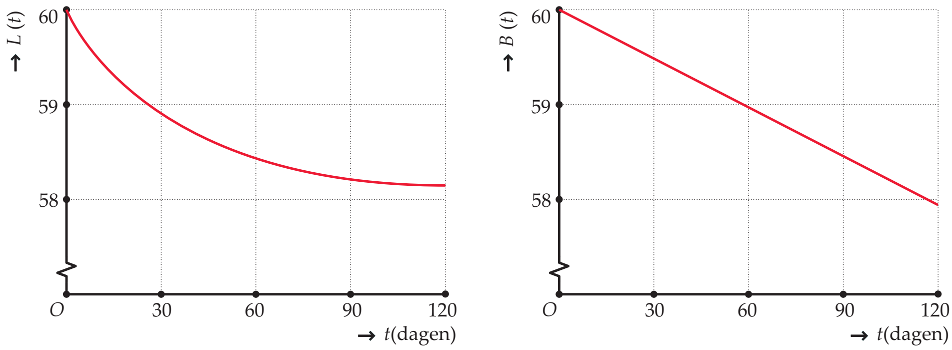
Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel, de somregel en de kettingregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

In deze grafieken zie je hoe de lengte L en de breedte B van een plank van 60 cm bij 60 cm in de loop van de tijd veranderen.



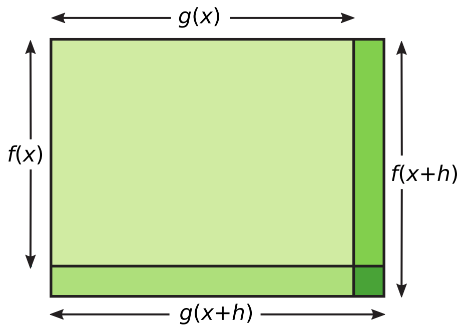
Figuur 1

a In welke periode krimpt de plank in de lengte sneller dan in de breedte?

b Op $t = 0$ is de plank vierkant. Tijdens het krimpen verandert de verhouding tussen lengte en breedte. Na hoeveel dagen is de plank opnieuw ongeveer vierkant?

c Op $t = 90$ is de lengte van de plank 58,3 cm en de breedte van de plank 58,5 cm. De plank krimpt dan in de lengte met 0,007 cm per dag en in de breedte met 0,017 cm per dag. Met hoeveel cm per dag verandert de oppervlakte dan?

Uitleg 1



Figuur 2

Als de lengte en de breedte van een rechthoek functies van x zijn, dan is de oppervlakte A een productfunctie in x: $A(x) = f(x) \cdot g(x)$
Verander de oppervlakte van deze rechthoek door x te laten toenemen tot $x + h$. De nieuwe oppervlakte is:
$A(x + h) = f(x + h) \cdot g(x + h)$

De toename van $A(x)$ bestaat uit drie rechthoekjes:

- een rechthoekje met een oppervlakte van $f(x) \cdot (g(x + h) - g(x))$
- een rechthoekje met een oppervlakte van $g(x) \cdot (f(x + h) - f(x))$
- een klein vierkantje met oppervlakte $(f(x + h) - f(x)) \cdot (g(x + h) - g(x))$

Deel je die toename door h, dan geldt:

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h}$$

$$\approx f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{(f(x+h)-f(x))\cdot(g(x+h)-g(x))}{h}$$

Ofwel:

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h}$$

$$\approx f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \cdot h$$

En voor $h \to 0$ is dit:
$A'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$
Dit is de productregel, een differentieerregel om de afgeleide van een productfunctie te bepalen.

Opgave 1

Gegeven is de functie $P(x) = f(x) \cdot g(x)$. Je kunt deze functie opvatten als de oppervlakte van een rechthoek met lengte $f(x)$ en breedte $g(x)$.

a De toename van de oppervlakte op $[x, x + h]$ is

A. $\Delta P = \Delta f(x) \cdot \Delta g(x)$
B. $\Delta P = f(x) \cdot \Delta g(x) + g(x) \cdot \Delta f(x) + \Delta f(x) \cdot \Delta g(x)$
C. $\Delta P = f(x) \cdot \Delta g(x) + g(x) \cdot \Delta f(x)$

Uit de toename van de oppervlakte kun je een regel voor het differentiëren van $P(x) = f(x) \cdot g(x)$ afleiden.
Stel dat $f(x) = x^2$ en dat $g(x) = x^4$.

b Bepaal met de productregel de afgeleide van de productfunctie.

Uitleg 2

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^3$. Met deze twee functies kun je een nieuwe functie maken door het product te nemen van f en g: $P(x) = x^2 \cdot x^3 = x^5$.

De afgeleide van P is $P'(x) = 5x^4$. Dit is niet gelijk aan $f'(x) \cdot g'(x) = 2x \cdot 3x^2 = 6x^3$.
In het algemeen geldt dat de afgeleide van het product van twee functies niet gelijk is aan het product van de afgeleide van de functies. Door het vereenvoudigen van het product van f en g kun je met behulp van de machtsregel de afgeleide bepalen.
Je kunt ook de productregel gebruiken:
$P'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2 = 5x^4$

Vaak kun je de productregel vermijden door eerst haakjes uit te werken. Helaas kan dit niet altijd.

Opgave 2

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = x^5$.

a Schrijf de productfunctie $P(x)$ van deze twee functies zo kort mogelijk.

b Bepaal $P'(x)$.

c Ga na dat je de afgeleide ook kunt bepalen met de productregel.

Opgave 3

De functie $A(x) = 6x^2(x^3 - 5x)$ kun je opvatten als een productfunctie van f en g.

a Geef de functievoorschriften van f en g.

b Bepaal de afgeleide van A met behulp van de productregel.

c Differentieer de functie door de haakjes weg te werken.

Opgave 4

Gegeven is de functie: $h(x) = (3x - 2) \cdot \sqrt{x}$

a Je kunt functie h zien als het product van twee functies. Welke twee?

b Bepaal $h'(x)$ met behulp van de productregel.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor de afgeleide van een product van twee functies geldt de **productregel**:
Als $P(x) = f(x) \cdot g(x)$ dan is $P'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Deze differentieerregel is niet altijd nodig, vaak kun je haakjes wegwerken.

De productregel gebruik je vaak in combinatie met de voorgaande differentieerregels. Met name in combinatie met de kettingregel.

Voorbeeld 1

Differentieer met de productregel de functie: $P(x) = (x^3 - 6x^2)(x^4 - 1)$.

Antwoord

Deze functie is het product van:

- $f(x) = x^3 - 6x^2$ waarvoor geldt: $f'(x) = 3x^2 - 12x$.
- $g(x) = x^4 - 1$ waarvoor geldt: $g'(x) = 4x^3$.

De afgeleide van P vind je door de productregel toe te passen:

$P'(x) = (3x^2 - 12x)(x^4 - 1) + (x^3 - 6x^2)(4x^3)$

En na haakjes wegwerken: $P'(x) = 7x^6 - 36x^5 - 3x^2 + 12x$.

Je kunt ook direct de haakjes van functie P wegwerken.

Opgave 5

De functie $f(x) = x^2(x^3 - 4x)$ kun je opvatten als een productfunctie van u en v.

a Schrijf de voorschriften van u en v op.

b Bepaal de afgeleide van f met behulp van de productregel.

c Differentieer de functie door de haakjes weg te werken.

Voorbeeld 2

Differentieer de functie: $h(x) = x(2x+1)^3$.

Antwoord

Deze functie is het product van:

- $f(x) = x$ waarvoor geldt: $f'(x) = 1$.
- $g(x) = (2x+1)^3$ waarvoor geldt: $g'(x) = 3 \cdot (2x+1)^2 \cdot 2$
  Gebruik de kettingregel.

De afgeleide van h vind je door de productregel toe te passen:

$h'(x) = 1 \cdot (2x+1)^3 + x \cdot 3 \cdot (2x+1)^2 = (2x+1)^3 + 6x(2x+1)^2$

Je kunt ook eerst de haakjes van functie h wegwerken en zonder productregel differentiëren.

Opgave 6

De functie $f(x) = \left(x^2+3x\right)\left(x^2+10\right)^3$ kun je opvatten als een productfunctie van u en v.

a Schrijf de voorschriften van u en v op.

b Bepaal de afgeleide van $u(x)$.

c Bepaal de afgeleide van $v(x)$.

d Bepaal met de productregel de afgeleide van f. Je hoeft niet te herleiden.

Opgave 7

Bepaal de afgeleide van $g(x) = (2x+5) \cdot \sqrt{3x+4}$.

Opgave 8

Bepaal de afgeleide van $g(x) = \left(3x^2+5\right)(7x+5)^4$.

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie: $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$.
Stel met behulp van differentiëren de vergelijking van de raaklijn op aan de grafiek in het punt (0,0).

Antwoord

De afgeleide vind je met behulp van de productregel (en de kettingregel):

$f(x) = x \cdot \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 1 \cdot \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$

Omdat je hier alleen $x = 0$ moet invullen, is verder herleiden niet nodig: $f'(x) = 1$.

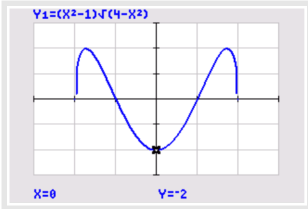
De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in (0,0) is: $y = x$.

Opgave 9

Gegeven is functie $f(x) = 2x\sqrt{x^2+4}$. Stel met behulp van differentiëren de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in het punt (0,0) op.

Opgave 10

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = \left(x^2 - 1\right) \cdot \sqrt{4 - x^2}$.



Figuur 3

a Bepaal de afgeleide van deze functie.

b Bereken met behulp van de afgeleide algebraïsch de extremen van f.

c De grafiek van f gaat door het punt (1,0). Stel een exacte vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek in dit punt.

Verwerken

Opgave 11

Bepaal de afgeleide.

a $f(x) = \left(x^3 + 6\right)\left(4x^2 - 5x\right)$

b $g(x) = (10 - x) \cdot \sqrt{x}$

c $h(x) = 3x(x + 5)^4$

d $j(x) = x \cdot \sqrt{5 + x^2}$

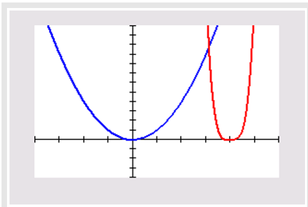
e $k(x) = x - \sqrt{5 + x^2}$

Opgave 12

Stel met behulp van differentiëren de vergelijking van de raaklijn op aan de grafiek van $f(x) = 2x \cdot (4 - 3x)^5$ in het punt (0,0).

Opgave 13

Bekijk de grafieken van de functies $y_1(x) = x^2$ en $y_2(x) = (2x - 8)^4$. De functie $f(x) = y_1(x) \cdot y_2(x)$ is de productfunctie van beide.



Figuur 4

a De nulpunten van f kun je uit de gegeven grafieken afleiden. Welke nulpunten heeft de grafiek van f?

b Toon aan dat $f'(x) = (2x - 8)^3\left(12x^2 - 16x\right)$.

c Bepaal met behulp van de afgeleide de extremen van f. Rond indien nodig af op gehelen.

d Voor welke waarden van k heeft de vergelijking $f(x) = k$ precies vier oplossingen? Rond af op gehelen.

Opgave 14

Differentieer.

a $f(x) = ax^2 \cdot \left(a + 4x^3\right)^4$

b $V(r) = \left(100 - \frac{5}{r}\right)(20 - r)^2$

c $A(z) = 2\pi \cdot z \cdot (1 - \sqrt{z})^5$

Opgave 15

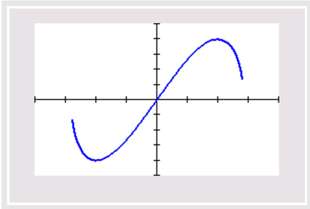
Gegeven is de functie: $f(x) = 4x\sqrt{x} \cdot (1 - x)^3$.

a Toon aan dat $f'(x) = (1 - x)^2 \cdot (6\sqrt{x} - 18x\sqrt{x})$.

b Voor welke waarden van x heeft de grafiek van f een raaklijn evenwijdig aan de x-as?

c Deze functie heeft twee extremen. Welke twee? Rond indien nodig af op twee decimalen.

Opgave 16



Figuur 5

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x \cdot \sqrt{8 - x^2}$.

a Bereken exact de nulpunten van f.

b Bereken met behulp van differentiëren het bereik van f.

c Stel een exacte vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt (0,0).

Opgave 17

Gegeven is de functie: $f(x) = 0{,}25x^2 - x\sqrt{x}$.

a Bereken algebraïsch het bereik van f.

b Voor welke p is de lijn met vergelijking $y = 2x + p$ een raaklijn aan de grafiek van f?

Testen

Opgave 18

Bepaal de afgeleide van de volgende functies:

a $f(x) = 6x\left(1 + x^2\right)^3$

b $H(t) = t \cdot \sqrt{1 - t^2}$

c $y(x) = (ax - 4)^2(6 - x)^3$

d $g(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

Opgave 19

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x\sqrt{x} + 4x$.

a Bepaal de nulwaarden van f.

b Bereken algebraïsch de extremen van f.

Opgave 20

Gegeven is de functie $f(x) = x\left(x^2 - 10\right)^3$.

Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.