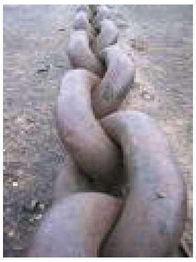
2.2 De kettingregel

Inleiding

In veel functievoorschriften komen haakjes voor.
Vaak kun je die eenvoudig uitwerken, maar niet altijd.
Met name bij samengestelde functies, zeg maar functies die als een ketting aan elkaar zijn geschakeld, is het uitwerken van haakjes vaak helemaal niet eenvoudig, of zelfs gewoon onmogelijk. Het differentiëren van dergelijke functies vereist een speciale differentieerregel.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de kettingregel voor het differentiëren van samengestelde functies;
- de algemene machtsregel gebruiken bij het differentiëren.

Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel en de somregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Bij het lozen van olie op zee ontstaat een zich cirkelvormig uitbreidende olievlek.
De straal R (in meter) van die olievlek hangt af van de tijd t (in uren).

Bijvoorbeeld kan gelden: $R = \sqrt{7t}$.

a Waarom is R een samengestelde functie?

b Hoe snel verandert de straal van de olievlek na 3 uur?

c Kun je het antwoord op de vorige vraag met behulp van differentiëren vinden? En hoe dan?

Uitleg 1

Soms bestaat een functievoorschrift uit een serie geschakelde functies.

Bijvoorbeeld: $S(x) = (3x+1)^2$.
Een functiewaarde $S(x)$ bereken je in twee stappen met functies g en f:

- $g(x) = 3x + 1$
- $f(g(x)) = (g(x))^2$

De functie $S(x) = (3x+1)^2 = (g(x))^2 = f(g(x))$ heet een samengestelde functie of kettingfunctie.

$$x \xrightarrow{g(x)} 3x+1 \xrightarrow{f(g(x))} (3x+1)^2$$

Figuur 2

Deze kettingfunctie kun je niet zo maar differentiëren met de machtsregel:

$S'(x) \neq 2(3x+1)^1 = 6x + 2$

Dat zie je door bij de functie S eerst de haakjes weg te werken en dan pas te differentiëren.
$S(x) = 9x^2 + 6x + 1$ en $S'(x) = 18x + 6$.

Er is ook een andere manier.

Schrijf $g(x) = 3x + 1 = u$ en $f(u) = u^2$. Dan is $S(x) = f(g(x))$.

Het differentiëren van S gaat als volgt:

- Bepaal de afgeleide van $g(x)$: $g'(x) = 3$
- Bepaal de afgeleide van $f(u)$: $f'(u) = 2u$
- De afgeleide van S is het product van bovenstaande twee afgeleides: $S'(x) = g'(x) \cdot f'(u) = 3 \cdot 2u = 6 \cdot (3x + 1) = 18x + 6$

In het algemeen geldt dat als $S(x) = f(g(x))$ dan is $S'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Dit is de kettingregel.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**. Gegeven is de functie: $S(x) = \left(2x^2 + 1\right)^2$.

a Waarom is S een samengestelde functie? Waaraan herken je dat?

b De functie $S(x)$ kan geschreven worden als $S(x) = f(g(x))$. Geef $g(x) = u$ en $f(u)$.

c Bepaal $g'(x)$ en $f'(u)$.

d Bepaal de afgeleide van $S(x)$ met de kettingregel.

Opgave 2

Gegeven is de samengestelde functie $f(x) = 3(x - 2)^2 - 2$.

a Ontleed $f(x)$ in afzonderlijke schakels.

b Welke invoerwaarden passen bij de functiewaarde 25?

c Deze functie kun je differentiëren zonder eerst de haakjes uit te werken. Laat zien hoe.

Opgave 3

Gegeven is functie: $g(x) = \left(3x^2 + 2\right)^4$.

a Deze functie kun je zien als een samenstelling van twee functies. Welke twee functies?

b Bepaal met behulp van de kettingregel de afgeleide van g.

Opgave 4

Schrijf de volgende functievoorschriften als een ketting van afzonderlijke functies.

a $y = \sqrt{x^2 - 1}$

b $y = 3x^3 + 1$

c $y = \left(3x^2 + 2\right)^4$

Uitleg 2

Door de functie $f(x) = \sqrt{x}$ om te schrijven naar $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ kun je met behulp van de algemene machtsregel deze functie differentiëren:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Het domein van functie f is $[0, \rightarrow\rangle$. Maar bij de afgeleide is $x = 0$ geen toegelaten waarde. De grafiek heeft voor $x = 0$ een verticale raaklijn. Zo'n raaklijn heeft geen richtingscoëfficiënt.

De functie $S(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$ kun je omschrijven naar $S(x) = \left(2x^2 + 1\right)^{0,5}$.
Je kunt hier geen haakjes wegwerken. Ook kun je geen gebruik maken van transformaties. Wel kun je de functie als kettingfunctie beschouwen en met de kettingregel differentiëren.

Schrijf $g(x) = 2x^2 + 1 = u$ en $f(u) = \sqrt{u}$, dan $S(x) = f(g(x))$.

- $f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$
- $g'(x) = 4x$

Dus $S'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 4x = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$

Opgave 5

Gegeven zijn de functies: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $S(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4}$.

a Schrijf functie f als een machtsfunctie en differentieer de functie.

b Functie S is een kettingfunctie. Differentieer de functie.

Opgave 6

Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = x^2 + 2$ met $x \geq 0$.

a Schrijf het functievoorschrift op van $h(x) = f(g(x))$.

b Differentieer h.

c Schrijf het functievoorschrift van $k(x) = g(f(x))$ zo eenvoudig mogelijk en differentieer k.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **samengestelde functie** is een functie die uit twee of meer in serie geschakelde functies bestaat.

$$x \xrightarrow{g(x)} u \xrightarrow{f(u)} f(g(x))$$

Figuur 3

Voor de afgeleide van een samengestelde functie geldt de **kettingregel**:
Als $S(x) = f(g(x))$ dan is $S'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Ook geldt de **algemene machtsregel**:

Als $f(x) = x^r$ dan is $f'(x) = rx^{r-1}$ voor elke reële waarde van r.

Deze differentieerregel pas je vooral toe bij gebroken functies en wortelfuncties.

Voorbeeld 1

Differentieer de functie: $S(x) = \left(x^2 + 2x\right)^4$.

Antwoord

Dit is een samengestelde functie $S(x) = f(g(x))$.

Schrijf $g(x) = x^2 + 2x = u$ en $f(u) = u^4$.

- $f'(u) = 4u^3$
- $g'(x) = 2x + 2$

$S'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = 4u^3 \cdot (2x + 2) = 4\left(x^2 + 2x\right)^3 \cdot (2x + 2)$

$S'(x) = \left(x^2 + 2x\right)^3 \cdot (8x + 8)$

Opgave 7

Gegeven is de functie: $h(x) = \left(2x^2 + 1\right)^8$.

a Deze functie heeft de vorm $h(x) = f(g(x))$. Schrijf de voorschriften van f en g op.

b Laat zien dat $h'(x) = 32x\left(2x^2 + 1\right)^7$.

Opgave 8

Gegeven zijn de functies: $f(x) = x^4$ en $g(x) = 2x^3 + 4x$.

a Schrijf het functievoorschrift op van $h(x) = f(g(x))$.

b Bepaal de afgeleide van h.

c Schrijf het voorschrift op van de functie $k(x) = g(f(x))$.

d Bepaal de afgeleide van k.

Voorbeeld 2

Differentieer de functies:

- $g(x) = 2x \cdot \sqrt[3]{x}$
- $h(x) = \frac{1}{x}$

Antwoord

- Schrijf g als machtsfunctie:

  $g(x) = 2x \cdot \sqrt[3]{x} = 2x^1 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 2x^{1\frac{1}{3}}$

  Pas de machtsregel toe:

  $g'(x) = 2 \cdot 1\frac{1}{3}x^{1\frac{1}{3}-1} = 2\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}} = 2\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$

- Schrijf h als machtsfunctie:

  $h(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

  Pas de machtsregel toe:

  $h'(x) = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Opgave 9

Differentieer de functies. Schrijf de afgeleiden zonder gebroken en/of negatieve exponenten.

a $f(x) = 2\sqrt{x}$

b $f(x) = x\sqrt{x}$

c $f(x) = 5 \cdot \sqrt[3]{x}$

d $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$

Voorbeeld 3

Gegeven is de functie: $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.
Bereken met behulp van differentiëren de richtingscoëfficiënt (hellingsgetal) van de raaklijn aan de grafiek van deze functie voor $x = 1$.

Antwoord

Schrijf de wortelvorm als een macht:

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} = \left(9 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} = (g(x))^{\frac{1}{2}}$$

Differentieer f met de kettingregel:

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(g(x))^{\frac{1}{2}-1} \cdot g'(x) = \tfrac{1}{2}\left(9 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -x \cdot \left(9 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

De gevraagde richtingscoëfficiënt (hellingsgetal) is: $f'(1) = \frac{-1}{\sqrt{8}} = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$

Opgave 10

Gegeven is de functie: $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Bereken met behulp van differentiëren het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek van deze functie voor $x = 1$. Geef een exact antwoord.

Opgave 11

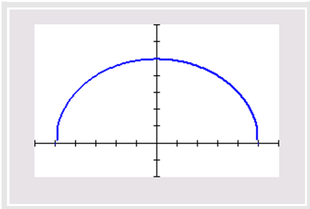
Bekijk de grafiek van $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

a Schrijf het domein en het bereik van f op.

b Bepaal de afgeleide van f.

c Bereken met behulp van de afgeleide het maximum van f.

d Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 3$.



Figuur 4

Verwerken

Opgave 12

Differentieer de functies.

a $f(x) = \left(x^2 - 100\right)^4$

b $g(x) = -5 + (1 - x)^3$

c $h(x) = 25(2 - 4x)^3$

d $j(x) = 2p^2x - (px + 3)^4$

Opgave 13

Gegeven is $f(x) = 3 \cdot \sqrt[4]{x}$. Bereken algebraïsch het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 1$.

Opgave 14

Gegeven zijn de functies: $f(x) = \sqrt{x - 1}$ en $g(x) = x^2 - x$.

a Schrijf het functievoorschrift op van $h(x) = f(g(x))$.

b Bepaal de afgeleide van h.

c Schrijf het functievoorschrift op van $k(x) = g(f(x))$.

d Bepaal de afgeleide van k.

Opgave 15

Bepaal de afgeleide.

a $f(x) = \sqrt[3]{x^7}$

b $g(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x} + 1$

c $h(x) = (1 - \sqrt{x})^3$

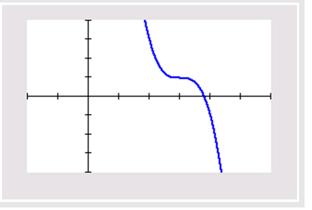
d $j(x) = 2x - \frac{5}{1-x}$

Opgave 16

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = -(2x-6)^3 + 4$.

a De grafiek lijkt dalend voor elke waarde van x behalve voor $x = 3$. Toon aan dat dit zo is.

b De raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$ snijdt de y-as in punt P. Bereken de coördinaten van P.



Figuur 5

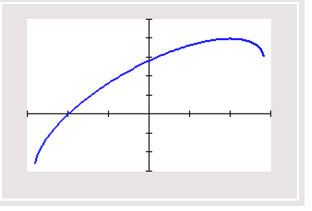
Opgave 17

Bekijk de grafiek van de functie $f(x) = x + \sqrt{8 - x^2}$.

a Bepaal exact het domein van f.

b Bereken exact het bereik van f.

c Noem de randpunten van de grafiek van f respectievelijk A en B. Voor welke waarde van x is het hellingsgetal van de raaklijn aan de grafiek van f gelijk aan dat van lijn AB?



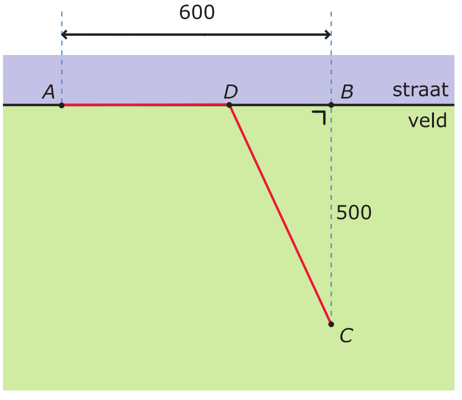
Figuur 6

Toepassen

Opgave 18: Waterleiding aanleggen

Vanuit punt A moet een waterleiding gelegd worden naar punt B. Langs de straat bedragen de kosten € 30,00 per meter en door het veld € 70,00 per meter. De lengte van AB is 600 meter en de lengte van BC is 500 meter. Er zijn verschillende mogelijkheden om de waterleiding aan te leggen:

- langs de straat tot aan punt B en vervolgens door het aangrenzende terrein naar punt C;
- direct vanuit A door het veld, in een rechte lijn naar C;
- of een van de vele tussenmogelijkheden: de leiding wordt dan voor een gedeelte langs de straat aangelegd, tot aan punt D, en vervolgens vanaf de straat naar punt C.



Figuur 7

a Hoeveel bedragen de kosten als je voor de eerste mogelijkheid kiest?

b Hoeveel bedragen de kosten als je voor de tweede mogelijkheid kiest?

c Bekijk de derde mogelijkheid. Neem voor de lengte van BD de variabele x. Druk nu de kosten voor de aanleg van deze waterleiding uit in x.

d Hoe moet je de waterleiding aanleggen opdat de kosten minimaal zijn? Bereken de minimale kosten met behulp van de afgeleide.

Testen

Opgave 19

Differentieer de volgende functies.

a $f(x) = 6\left(1 + x^2\right)^3$

b $y(x) = (1 - 4x)^4 + 5$

c $R(t) = \sqrt{\frac{15}{\pi}t}$

d $f(x) = \sqrt{10 + 4x^2}$

e $K(p) = \frac{2}{p\sqrt{p}}$

f $f(x) = x^3 + 2x - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$

Opgave 20

Gegeven is de functie $f(x) = 2x - \sqrt{x + 2}$.

a Als je de grafiek van deze functie op je grafische rekenmachine bekijkt met de standaardinstellingen van het venster, lijkt het wel een rechte lijn te zijn. Wat is het domein van f?

b Bepaal de afgeleide van f.

c Bereken met behulp deze afgeleide het minimum van f.

d Wat is het bereik van deze functie f?

e Bereken de hellingwaarde van de grafiek van f in het punt waar deze grafiek de y-as snijdt.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het differentiëren met de kettingregel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.