2.1 Differentieerregels

Inleiding

De afgeleide van een functie geeft de helling van de grafiek in een punt weer. Het is ook een maat voor de veranderingssnelheid van de functiewaarde voor een bepaalde waarde van x. Je bepaalt een afgeleide door te differentiëren. Dat lijkt tot nu toe misschien een eenvoudige klus. Maar wanneer de functies ingewikkelder worden moet je er speciale **differentieerregels** voor toepassen. Je herhaalt eerst nog even de al bekende technieken.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- opnieuw regels toepassen bij het differentiëren;
- het belang van uitbreiding van die differentieerregels ontdekken.

Voorkennis

- allerlei soorten functies gebruiken;
- differentiëren met de machtsregel, de constante-regel en de somregel;
- werken met de afgeleide en de tweede afgeleide, onder andere voor het berekenen van extremen en buigpunten.

Verkennen

Opgave V1

Je kunt al differentiëren.
Neem nu de functies f en g met $f(x)=6x^5$ en $g(x)=2x^3$.

Bepaal de afgeleide van:

a $f_1(x)=f(x)+g(x)$

b $f_2(x)=f(x)-g(x)$

c $f_3(x)=f(x)\cdot g(x)$

d $f_4(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

Voor functie f_1 (de som van f en g) geldt dat de afgeleide gelijk is aan de som van de afgeleiden van f en g.

e Kun je voor f_2, f_3 en f_4 iets vergelijkbaars opschrijven?

Uitleg

Met differentiëren bepaal je de afgeleide functie.

De afgeleide van een functie $y = f(x)$ is te bepalen door h naar 0 te laten naderen in het differentiequotiënt:

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Met behulp van een afgeleide functie kun je de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een punt aan de grafiek van de functie bepalen.

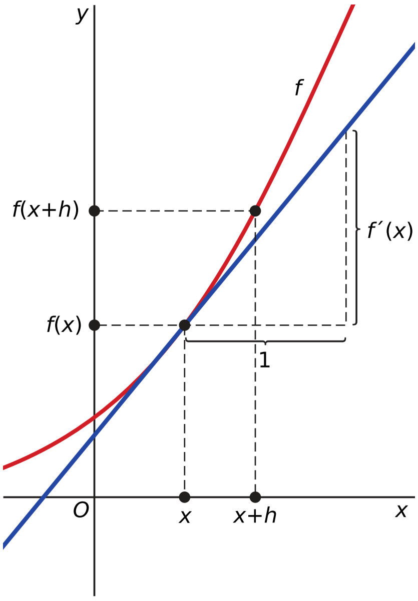
Je kunt de afgeleide van machtsfuncties bepalen met de machtsregel.

- Als $f(x) = x^3$ dan is $f'(x) = 3x^2$.
- Als $g(x) = 3x^2$ dan is $g'(x) = 6x$.

Bij de somfunctie $f(x) + g(x)$ gebruik je de somregel en de machtsregel.

De afgeleide van $f(x)+g(x) = x^3+3x^2$ is $f'(x)+g'(x) = 3x^2+6x$

Als $k(x) = 4x^3-5x+6$ dan volgt uit de somregel, de machtsregel en de constanteregel dat: $k'(x) = 12x^2 - 5$.



Figuur 2

Opgave 1

Bestudeer de **Uitleg**.

a Omschrijf wat differentiëren precies is.

b Hoe kom je aan de regels voor het differentiëren?

c Welke differentieerregels pas je toe bij het bepalen van de afgeleide van $f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 12$?

d Kun je met behulp van differentieerregels de afgeleide bepalen van $f(x) = (2x)^3$? Zo ja, hoe?

e Waarom kun je met de differentieerregels die je op dit moment kent moeilijk de afgeleide bepalen van $f(x) = \left(2x^2 + 3\right)^{12}$?

f Waarom kun je met de differentieerregels die je op dit moment kent wel de afgeleide bepalen van $f(x) = \frac{2x+3x^2}{x}$ maar niet de afgeleide van $g(x) = \frac{2x+3x^2}{x+1}$?

Opgave 2

Differentieer de functies.

a $f(x) = 2x^3 + 4x - 5$

b $g(x) = -x^4 - 3x^2 + 10x$

c $h(x) = 85$

d $j(x) = (x + 4)(2x - 2)$

Opgave 3

Gegeven is functie: $f(x) = x^3 - 4x + 2$.

a Bepaal de afgeleide van f.

b Stel de formule op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 0$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **afgeleide** van een functie $y = f(x)$ is te bepalen door h naar 0 te laten naderen in het differentiequotiënt:
$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

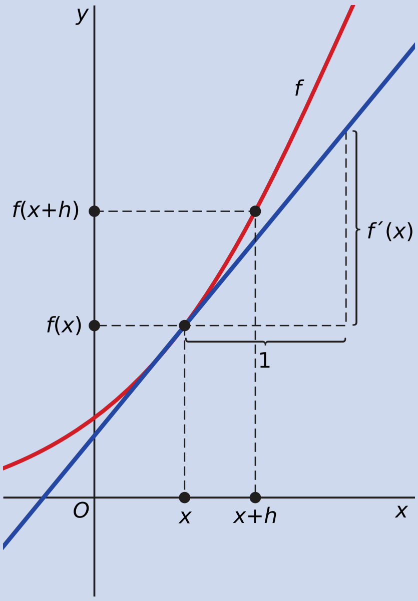
Met behulp van een afgeleide functie kun je de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een punt aan de grafiek van de functie bepalen.

Meestal bepaal je de afgeleide niet op deze manier, maar door te differentiëren. Je kent al een aantal differentieerregels:

Machtsregel:
Als $f(x) = cx^n$ dan is $f'(x) = ncx^{n-1}$ voor elke c en voor gehele positieve n.

Constante regel:
Als $f(x) = c$ dan is $f'(x) = 0$.

Somregel:
Als $f(x) = u(x) \pm v(x)$ dan is $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$.



Figuur 3

Deze differentieerregels gebruik je bij het berekenen van hellingswaarden van functies die bestaan uit een som (verschil) van machtsfuncties met positieve gehele exponenten. Heb je daarentegen met andere functies te maken, dan zijn ook andere differentieerregels nodig.

Een hellingswaarde in een punt (x, y) van een functie f bepaal je door de x-waarde in de afgeleide functie f' in te vullen.
Voor **extreme waarden** van een functie is de hellingswaarde 0.
In een cartesisch assenstelsel geldt voor de hoek α van de raaklijn met de x-as, dat $\tan(\alpha)$ is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn en dus aan de hellingswaarde.

Voorbeeld 1

Het differentiëren van functies die bestaan uit een som (of verschil) van machtsfuncties met positieve gehele exponenten gaat als volgt:

- $f(x) = 31{,}7$ geeft: $f'(x) = 0$.
- $g(x) = 7x^4$ geeft: $g'(x) = 28x^3$.
- $h(x) = x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 2x + 100$ geeft: $h'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 30x^2 - 2$.
- $s(t) = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$ geeft: $s'(t) = v_0 + at$.
- $A(r) = 20\pi r + 2\pi r^2$ geeft: $A'(r) = 20\pi + 4\pi r$.
- $j(x) = a^2x^4 - 2bx^2 + c^3$ geeft: $j'(x) = 4a^2x^3 - 4bx$.

Opgave 4

Differentieer de functies.

a $f(x) = 6 - \frac{1}{2}x^3$

b $K(q) = 2q^3 + 60q^2 - 100q + 50$

c $I(d) = \frac{1}{6}\pi d^3 + a^2$

d $g(x) = x(x - 20)$

e $h(x) = x^4 + 6x + 12$

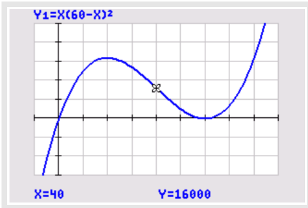
f $H(t) = 25t - 5t^2$

g $T(p) = a^2p^3 - ap + a^4$

h $j(x) = x(x+4)^2$

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie f met $f(x) = x(60-x)^2$.
Om de grafiek van f goed in beeld te krijgen kun jer beter eerst de extremen berekenen. Bereken algebraïsch de extremen van f.



Figuur 4

Antwoord

Bekijk de grafiek van f. Er lijken twee extremen te zijn. Zeker weet je dat pas na differentiëren.
Om de afgeleide te kunnen bepalen moeten eerst de haakjes worden weggewerkt:

$f(x) = x(60-x)^2 = 3600x - 120x^2 + x^3$

De afgeleide is: $f'(x) = 3600 - 240x + 3x^2$.

Bij de extremen is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn 0, dus voor het bepalen van de extremen stel je de afgeleide gelijk aan 0:

$f'(x) = 3600 - 240x + 3x^2 = 0$ geeft:

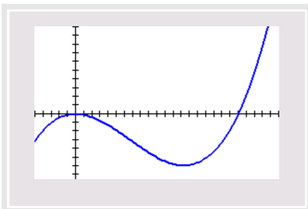
$$\begin{aligned} 3x^2 - 240x + 3600 &= 0 \\ x^2 - 80x + 1200 &= 0 \\ (x-20)(x-60) &= 0 \\ x = 20 \vee x &= 60 \end{aligned}$$

Er zijn dus twee extremen.

De extremen zijn: max. $f(20) = 32000$ en min. $f(60) = 0$.

Opgave 5

Bekijk de grafiek van de functie f met voorschrift $f(x) = 0{,}5x^2(x-20)$.



Figuur 5

a Om zelf de grafiek zo in beeld te krijgen, bereken je eerst algebraïsch de nulpunten van de functie. Kijk vervolgens naar de tabel en stel het venster van de grafische rekenmachine in. Welke instellingen geven (ongeveer) hetzelfde deel van de grafiek te zien?

b Wil je de extremen van f algebraïsch berekenen, dan moet je eerst de functie differentiëren. Werk eerst de haakjes weg en bepaal vervolgens de afgeleide.

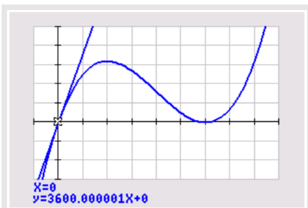
c Bereken de extremen van f in gehelen.

d Hoe groot is de hellingswaarde van de grafiek van f voor $x = 10$?

Voorbeeld 3

Bekijk de grafiek van $f(x) = x(60-x)^2$.

De raaklijn aan de grafiek van f in het punt (0,0) is getekend.
Welke richtingscoëfficiënt heeft deze raaklijn?
Zijn er andere punten op de grafiek van f waarin de raaklijn dezelfde hoek met de x-as maakt?



Figuur 6

Antwoord

Na haakjes wegwerken vind je voor de afgeleide van f:
$f'(x) = 3600 - 240x + 3x^2$
Dus $f'(0) = 3600$.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt (0,0) is daarom 3600.

Voor de hellingshoek α geldt $\tan(\alpha) = \frac{3600}{1} = 3600$. Alleen in een cartesisch assenstelsel heeft het berekenen van die hoek zin.

Voor andere punten van de grafiek waarin de raaklijn dezelfde hoek met de x-as maakt, geldt dat de afgeleide gelijk aan 3600 of -3600.
Los op: $f'(x) = 3600 \vee f'(x) = -3600$.
Ga na dat dit oplevert: $x = 0 \vee x = 80$, want de vergelijking $f'(x) = -3600$ heeft geen oplossingen.
Het enige andere punt waarin de raaklijn dezelfde hoek met de x-as maakt, is (80,24000).

Opgave 6

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 3**. Ga uit van de grafiek in een cartesisch assenstelsel.

a Laat zien, dat de afgeleide in het voorbeeld correct is.

b Welke hoek maakt de raaklijn aan de grafiek van f met de x-as bij $x = 10$? Rond af op twee decimalen.

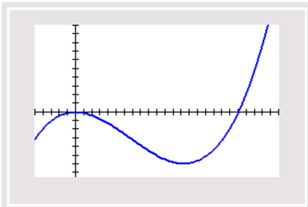
c Geef de coördinaten van het andere punt waarin de raaklijn dezelfde hoek met de x-as maakt.

Opgave 7

Bekijk de grafiek van de functie f met voorschrift $f(x) = 0{,}5x^2(x - 20)$.

a Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

b Bereken algebraïsch de coördinaten van het punt op de grafiek van f waarin de raaklijn evenwijdig loopt met die uit a. Rond af op twee decimalen.



Figuur 7

Voorbeeld 4

Welke van de volgende functies kun je herschrijven, zodat je met behulp van de al bekende differentieerregels de afgeleide kunt bepalen? Bereken ook van alle functies de afgeleide voor $x = 1$.

- $f(x) = (x-3)(2x+4)$
- $g(x) = 3 \cdot \sqrt{10 - x^3}$
- $h(x) = \frac{8x-4x^2}{x-2}$
- $j(x) = \left(2x^2 - 4\right)^{10}$

Antwoord

- $f(x) = (x-3)(2x+4) = 2x^2 - 2x - 12$, dus $f'(x) = 4x - 2$ en $f'(1) = 2$.
- Bij functie g kun je niet de al bekende differentieerregels gebruiken om de afgeleide te bepalen. $g'(1)$ bepaal je (nu nog) met de grafische rekenmachine: $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = -1{,}5$
- Functie h kun je vereenvoudigen: $h(x) = \frac{8x-4x^2}{x-2} = \frac{-4x(x-2)}{x-2} = -4x$ voor $x \neq 2$, dus $h'(x) = -4$ voor $x \neq 2$ en $h'(1) = -4$.
- Bij functie j kun je weliswaar in principe de haakjes wegwerken en vervolgens de bekende differentieerregels gebruiken, maar dit is tijdrovend. $g'(1)$ bepaal je (nu nog) met de grafische rekenmachine:
  $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = -20480$

Opgave 8

Bereken van de volgende functies de afgeleide voor $x = 2$. Doe dit indien mogelijk met behulp van differentiëren. Rond indien nodig af op één decimaal.

a $f(x) = \frac{2x^2-4x}{x}$

b $g(x) = 2x - 3 \cdot \sqrt[3]{12 - x^2}$

c $h(x) = x(2x-3)^2$

d $j(x) = 2 \cdot 5^x$

Opgave 9

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{2x-5}{x+8}$.

Stel de formule op van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$.

Verwerken

Opgave 10

Differentieer de functies.

a $f(x) = 5x^6 - 13x^5 + 10x - 25$

b $g(x) = ax^2 + bx + c$

c $y(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$

d $h(x) = -8x^8 - 88$

e $j(x) = 2ax^3 - 3a^2x + a^3$

f $A(r) = \pi r^2 + l \cdot 2r$

Opgave 11

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{4}{5}x^3 - 3x^2$.

a Bereken algebraïsch de extremen van f.

b Bereken de hellingswaarde van de grafiek van f voor $x = 5$.

c Welke hoek maakt de raaklijn aan de grafiek van f met de x-as voor $x = 5$ in een cartesisch assenstelsel? Rond af op twee decimalen.

Opgave 12

Bereken van de volgende functies de richtingscoëfficiënt van de raaklijn voor $x = 1$. Doe dit indien mogelijk met behulp van differentiëren.

a $f(x) = x(2x-3)^2$

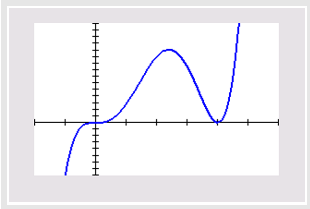
b $g(x) = 5(x^2 - 2)^{14}$

c $h(x) = 5 - \sqrt[4]{8(x+1)}$

d $j(x) = \frac{2x^2-12x+18}{x-3}$

Opgave 13

Bekijk de grafiek van $f(x) = x^3(x-20)^2$.



Figuur 8

a In het deel van de grafiek dat in beeld is, bevinden zich drie punten waarin de raaklijn aan de grafiek evenwijdig is aan de x-as. Bereken de x-coördinaten van die drie punten algebraïsch.

b Waarom heeft de functie f toch maar twee (lokale) extremen?

Opgave 14

Gegeven is functie $f(x) = 6 \cdot 2^{x-1}$. Bereken in één decimaal nauwkeurig de x-coördinaat van het snijpunt van de raaklijn aan de grafiek van f voor $x = 2$ met de x-as .

Opgave 15

Gegeven is de functie: $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 13x - 2$.

De lijn $x = -1$ snijdt de grafiek van f in punt A.

a Stel met behulp van differentiëren de formule l op van de raaklijn aan de grafiek van f in A.

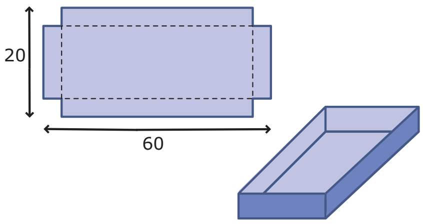
b In hoeveel andere punten van de grafiek heeft de raaklijn aan de grafiek van f dezelfde richtingscoëfficiënt als l?

c In welke punten snijdt in een cartesisch assenstelsel de raaklijn aan de grafiek van f de x-as in een hoek van 45°?

Toepassen

Opgave 16: Kartonnen bakje

Uit een stuk karton van 20 bij 60 centimeter wordt een bakje gevouwen. Neem voor de hoogte van dit bakje x cm.



Figuur 9

a De inhoud I van dit bakje hangt alleen af van x (als er verder niets boven het open bovenvlak mag uitsteken). Stel een bijpassend functievoorschrift $I(x)$ op.

b Bereken algebraïsch in mm nauwkeurig bij welke waarde van x de inhoud van het bakje maximaal is.

Testen

Opgave 17

Differentieer de volgende functies:

a $f(x) = -0{,}5x^4 + 3x$

b $f(x) = 10 - 6x^2 - x^4$

c $f(x) = (x-1)(x^2-1)$

d $f(x) = ax(1-x^2)$

e $H(t) = 3p^2 + 4pt^3$

f $y(t) = 20t^2(10-t)(15+t)$

Opgave 18

Het punt (2,7) ligt op de grafiek van $f(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

a Controleer deze bewering met een berekening.

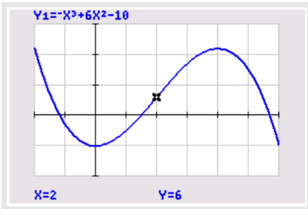
b Bereken algebraïsch de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt (2,7).

Opgave 19

Je ziet hier een deel van de grafiek van de functie $y = -x^3 + 6x^2 - 10$.

a De grafiek heeft twee (lokale) extremen. Bereken beide extremen algebraïsch.

b Bereken het punt van de grafiek tussen de twee toppen waarin de hellingswaarde het grootst is.



Figuur 10

Practicum

Met *Algebra*KIT kun je oefenen met **het differentiëren met behulp van de machtsregel en de somregel**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.