

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Modelleren** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...

Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- recht evenredig (met een macht van) — evenredigheidsconstante — rekenregels voor machten
- modelleren — modelcyclus — vragen die je helpen bij modelleren
- optimaliseren
- dynamisch model — vaste stapgrootte — discreet dynamisch model

Activiteitenlijst

- machtsfuncties herkennen — heen- en terugrekenen bij machtsfuncties
- modelleren als activiteit herkennen en de stappen in de modelcyclus herkennen — zelf rekenmodellen opstellen door goede vragen te stellen
- rekenmodellen bij optimaliseringsproblemen opstellen en toepassen
- discrete dynamische modellen opstellen en doorrekenen met Excel

Achtergronden

Modelleren is in feite een heel breed begrip: het wordt gebruikt om het op schaal bouwen van voorwerpen, het tekenen van objecten met de computer, het ontwerpen van rekenmodellen voor allerlei processen, enzovoorts, aan te duiden. In dit onderdeel beperken we ons tot het **wiskundig modelleren**: het opstellen van een wiskundig rekenmodel om een bepaald probleem op te lossen.

En dat is een vaardigheid die je bij vrijwel alle wetenschappen toepast.

Testen

Opgave 1

Een rechthoek van 6 bij 2 cm past precies in een gelijkbenige driehoek. Een zijde van 6 cm ligt op de basis van de driehoek, dus de bijbehorende hoekpunten van de rechthoek ook. De andere twee hoekpunten liggen elk op één van de gelijke benen van de driehoek. Hoe groot is de minimale oppervlakte van deze driehoek?

Opgave 2

Een kalkoen braden is lastig, omdat het enige tijd duurt voordat ook het binnenste van de kalkoen op temperatuur komt. Hoelang dat duurt, hangt af van het gewicht. Het is de kunst om de kalkoen zo lang te braden dat het binnenste net gaar is. Je kunt dat niet controleren zonder de kalkoen aan te snijden. De optimale braadtijd is daarom moeilijk vast te stellen. Gelukkig geven kookboeken vaak aanwijzingen voor de braadtijd, die afhankelijk is van het gewicht van de kalkoen. Onderzoekers hebben vastgesteld dat met de volgende formule het beste resultaat wordt verkregen:

$$t = 11g^{\frac{2}{3}}$$

Hierin is g het gewicht van de kalkoen in kg en t de tijd in minuten die nodig is om het binnenste van de kalkoen op een temperatuur van 85 °C te brengen.

- t is recht evenredig met een macht van g . Hoe groot is de evenredigheidsconstante?
- g is ook recht evenredig met een macht van t . Bereken de evenredigheidsconstante in drie decimalen nauwkeurig.

- c Bereken hoelang het bij een kalkoen van 3 kg duurt voor het binnenste op een temperatuur van 85 °C is. Verwacht je dat een kalkoen van 6 kg daarvoor twee keer zo veel tijd nodig heeft?
- Als het binnenste van de kalkoen een temperatuur heeft van 85 °C, dan duurt het nog een tijd voordat de kalkoen gaar is. Ga ervan uit dat die tijd 80 minuten is.
- d Geef de formule voor de totale braadtijd T van een kalkoen afhankelijk van het gewicht. Is de totale braadtijd recht evenredig met een macht van het gewicht?

Opgave 3

Een locomotief is op een schaal van 1 : 87 nagebouwd. Neem aan dat een echte locomotief met een snelheid van 60 km/h rijdt. Hoe snel moet de fabrikant het schaalmodel laten rijden om het 'echt' te laten lijken?

Los dit probleem op volgens de modelcyclus.

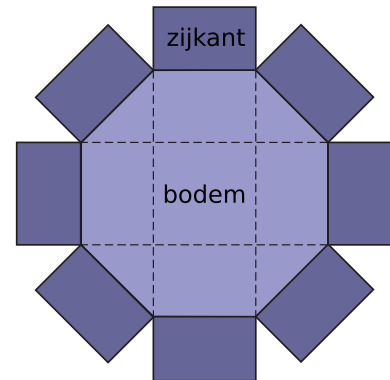


Figuur 1

Opgave 4

Een kartonnen snoepdoosje heeft de vorm van een regelmatige achthoek. Je ziet een uitslag van het doosje zonder deksel, de dikte van het karton wordt verwaarloosd. Deze uitslag moet precies passen op een vierkant van 18,0 bij 18,0 cm. Het doosje heeft een volkomen vlakke deksel. Dus als je deze uitslag in elkaar vouwt, krijg je een figuur die de volledige inhoud van het doosje bepaalt. x stelt de zijde van de achthoek voor, h is de hoogte van het doosje, beide worden in cm uitgedrukt.

- a Leid een formule af voor de inhoud van dit doosje.
- b Bereken de maximale inhoud van dit doosje. Geef je antwoord in gehele cm^3 .



Figuur 2

Opgave 5

De kwaliteit van het water in zwembaden wordt onder andere beoordeeld op grond van het ureumgehalte. Ureum komt in het water via zweet en urine. Metingen hebben aangetoond dat bij 1000 bezoekers per dag de hoeveelheid ureum in het water op die dag met 500 g toeneemt. Om te voorkomen dat er te veel ureum in het water komt, moet er zo verversd worden dat de wettelijke norm van 2 g ureum per m^3 water niet overschreden wordt. In het model wordt ervan uitgegaan dat dagelijks 1000 bezoekers een bad van 1000 m^3 bezoeken en dat de verversing van het water 's nachts plaatsvindt. Voor verversing rekent men 30 liter per persoon per dag. Dat betekent in dit model dat 's nachts 30 m^3 verversd wordt (dus 3% van het totaal). De eerste dag is er 0 g ureum in het water. Aan het eind van de dag zit er 500 g ureum in het water. Na het verversen is er dan aan het begin van de tweede dag 485 g ureum over.

- a Laat door berekening zien dat er aan het begin van de derde dag ruim 955 g ureum in het water zit.
- b In de loop van welke dag wordt de wettelijke norm overschreden? Licht je antwoord toe.
- Het blijkt dat 30 liter per bezoeker per dag verversen niet voldoende is. In plaats van 30 liter wordt daarom 200 liter genomen.
- c Toon aan dat voor de hoeveelheid ureum (U) aan het begin van de n -de dag geldt:

$$U(n) = 0,8 \cdot U(n-1) + 400.$$
 De hoeveelheid ureum aan het begin van de eerste dag is weer 0 g.
- d Laat zien dat aan het begin van elke dag aan de wettelijke norm wordt voldaan.

- e In de loop van de dag kan de wettelijke norm wel worden overschreden. Bereken op welke dag dat voor het eerst gebeurt.

(naar: examen wiskunde A havo in 1991, eerste tijdvak)

Toepassen

Opgave 6: Prooidier-roofdier modellen

In veel natuurgebieden is er sprake van een wisselwerking tussen de roofdieren en hun prooi, zoals vossen en konijnen. Modellen die zo'n wisselwerking bestuderen heten **prooi-roofdiermodellen**. De Italiaanse wiskunde **Vito Volterra** en de Amerikaanse wiskundige **Alfred J. Lotka** ontwierpen in 1925/1926 een dynamisch model voor dergelijke wisselwerkingen. Als $P(t)$ het aantal prooidieren en $R(t)$ het aantal roofdieren op tijdstip $t + 1$ is, zien hun vergelijkingen er in discrete vorm zo uit:

- $P(t + 1) = P(t) \cdot (a - b \cdot R(t))$
- $R(t + 1) = -R(t) \cdot (c - d \cdot P(t))$

Hierin zijn a , b , c en d positieve getallen. Bekijk maar eens met behulp van een rekenblad in Excel of je grafische rekenmachine hoe dit model zich gedraagt.

De eerste vergelijking laat zien dat de prooidieren bij afwezigheid van de roofdieren ($b = 0$) toenemen. De uitdrukking $a - b \cdot R(t - 1)$ laat echter zien, dat de toename vermindert afhankelijk van het aantal roofdieren R dat een periode eerder op ze heeft kunnen jagen.

De vergelijking voor de roofdieren kent een vergelijkbare interpretatie.

Kies waarden voor a , b , c en d en reken een prooi-roofdiermodel door. Onderzoek of er een evenwichtssituatie ontstaat waarin de aantallen stabiliseren. Het beste kun je een rekenblad in Excel maken waarin deze vier parameters instelbaar zijn zodat je wat realistische resultaten krijgt...

Tegenwoordig bestaan er diverse aangepaste prooi-roofdiermodellen en animaties ervan op internet. Bekijk bijvoorbeeld dit [artikel uit de Scholarpedia](#).



Figuur 3

Opgave 7: Kogelbaan

De **kogelbaan** is een model voor de baan die een in vacuüm (om luchtweerstand te kunnen verwaarlozen) onder een bepaalde hoek en met een bepaalde snelheid afgeschoten massapunt aflegt.

Noem de beginsnelheid v_0 en de hoek waaronder het massapunt wordt afgeschoten α .

De snelheid in de x -richting is $v_0 \cos(\alpha)$.

De snelheid in de y -richting is $v_0 \sin(\alpha)$, maar daar telt ook de zwaartekracht nog mee.

Dus is: $x = v_0 \cos(\alpha) \cdot t$ en $y = v_0 \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$.

Hierin is g de gravitatieconstante: $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$.

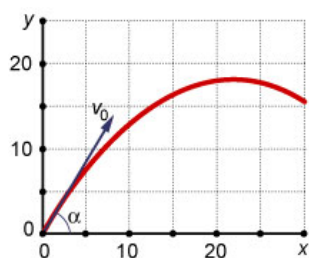
Hiermee maak je een model in Excel: [Model kogelbaan](#).

Laat zien dat bij de baan de formule $y = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot x - \frac{g}{2v_0 \cos^2(\alpha)} \cdot x^2$ hoort.

Kun je de gunstigste afschiethoek α bepalen als je de kogel zo ver mogelijk van het afschietpunt weer op de grond wilt laten komen?

Zie ook deze [simulatie van de kogelbaan](#).

- Leid zelf de vergelijking van de baan van deze parabool af.
- Druk het punt waar de kogel weer op de grond komt uit in v_0 , α en g .



Figuur 4

- c Bij welk waarde voor α komt de kogel zo ver mogelijk? Druk de hoogte die de kogel dan haalt uit in v_0 en g .



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
