1.3 Optimaliseringsproblemen

Inleiding

Regelmatig kom je situaties tegen waarbij het om een zo groot mogelijke of een zo klein mogelijke waarde gaat. Bijvoorbeeld bij vragen als: “Welke afmetingen heeft zo een klein mogelijke rechthoekige lap grond waarop een fabriekshal moet komen met een rechthoekig vloeroppervlak van 2400 m^2 en met daar omheen een boswal van 10 m breed aan de zijkanten en de achterkant en 20 m breed aan de voorkant van de fabriekshal?”
Je spreekt dan van een optimaliseringsprobleem, je wilt een optimale (hier: maximale of minimale) oplossing.

Je leert in dit onderwerp

- modelleren gebruiken bij problemen waarbij het gaat om een maximale of een minimale waarde.

Voorkennis

- werken met wiskundige modellen in eenvoudige situaties, de modelcyclus;
- meetkundige berekeningen met de stelling van Pythagoras, gelijkvormigheid, oppervlakte, inhoud.

Verkennen

Opgave V1

Stel je wilt een rechthoekig raam inbouwen, met breedte b en hoogte h. Je neemt aan dat de hoeveelheid licht die binnenkomt afhankelijk is van de oppervlakte van het raam. Tevens heb je genoeg hout voor een raamkozijn met een omtrek van totaal 10 m. Je wil dat er zoveel mogelijk licht binnenkomt, maar je gaat niet meer materiaal kopen voor je raamkozijn.

a Geef twee vergelijkingen die het bovenstaande probleem omschrijven.

b Welke optimale afmetingen heeft het raam?

Uitleg

Probleem: “Een fabrikant van schoenen wil een nieuwe rechthoekige fabriekshal laten bouwen met een vloeroppervlakte van 2400 m^2. Hij dient een aanvraag in voor het aankopen van een rechthoekig stuk grond. Om de fabriek komen groenstroken en een parkeerruimte. Aan beide zijden en aan de achterkant worden dit stroken van 10 m breed, aan de voorkant een strook van 20 m breed. De fabrikant beoogt een zo klein mogelijk stuk grond te kopen dat aan deze eisen voldoet. Welke afmetingen heeft dit terrein?”

Om zo'n probleem te kunnen oplossen, maak je een bijbehorend model.
Aannames: de fabriekshal en het terrein zijn zuivere rechthoeken.

Model ontwerpen: de oppervlakte van het terrein hangt af van de lengte en de breedte ervan. Voor de lengte en de breedte van het terrein, of de lengte en de breedte van de fabriekshal zoek je waarden. De oppervlakte van de fabriekshal is 2400 m^2. Met deze gegevens maak je een figuur.
Neem bijvoorbeeld voor de fabriekshal een breedte van 30 m, dan moet de lengte wel 80 m zijn. Als je de lengte als voorkant neemt, is de oppervlakte van het terrein, inclusief de groenstroken en parkeerruimte die je daarvoor moet aankopen, $60 \cdot 100 = 6000$ m^2. Zo kun je verschillende gegevens in een figuur gebruiken om te kijken wat de beste oplossing is.

Opgave 1

Bekijk het probleem van de schoenenfabrikant in de **Uitleg**.

a Leg uit waarom bij een keuze van 30 voor de breedte geldt dat de lengte 80 m is. Leg ook uit waarom de oppervlakte van het terrein dan $60 \cdot 100 = 6000$ m^2 is als de lengte de voorkant van het gebouw wordt.

b Waarom kan hij bij a beter de breedte als voorkant van het gebouw nemen?

Voor de voorkant van de fabriekshal kun je verschillende getallen proberen en zo de oplossing van het probleem zoeken. Maar je kunt die voorkant ook variabel maken, bijvoorbeeld x stellen.

c Hoe groot wordt dan de andere afmeting van de fabriekshal? En hoe groot wordt de oppervlakte van het totale terrein?

d Los nu het probleem verder op.

Opgave 2

Bekijk het probleem van de schoenenfabrikant in de **Uitleg**. Je kunt de lengte van de voorkant van het totale terrein als variabele x nemen.

a Hoe groot worden dan de afmetingen van de fabriekshal? Hoe groot wordt de oppervlakte van het totale terrein?

b Los ook nu het probleem verder op.

Theorie en voorbeelden

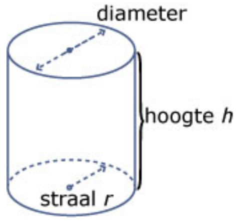
Om te onthouden

Onder **optimaliseren** versta je het vinden van een zo gunstig mogelijke (meestal een minimale of een maximale) waarde voor een bepaalde grootheid in een welomschreven situatie. Die welomschreven situatie betekent dat je al aan het modelleren bent: je doet aannames om het probleem dat je wilt oplossen te vereenvoudigen tot zijn essentie. Vervolgens bouw je een rekenmodel op.
Meestal schakel je daarna de grafische rekenmachine (of een programma zoals Excel) in om de optimale oplossing te vinden.
De grafische rekenmachine kun je eigenlijk alleen inschakelen als het rekenmodel een verband tussen twee variabelen betreft. In de praktijk heb je vaak met meer dan twee variabelen te maken.

Voorbeeld 1

Een blikfabriek maakt onder andere cilindervormige blikken voor de conservenindustrie. Er is veel vraag naar blikken met een inhoud van 1 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat daar zo min mogelijk blik voor nodig is, dan blijven zijn kosten laag.
Welke afmetingen zal hij zijn literblikken geven?

Antwoord



Figuur 1

Eerst een rekenmodel opstellen:
Neem aan dat elk blik zuiver cilindrisch is en dat de benodigde hoeveelheid blik gelijk is aan de totale oppervlakte van het blik. De twee bepalende variabelen zijn de straal van (het grondvlak van) het blik r en de hoogte h, neem beide in cm. Het gegeven betreft de inhoud van een blik (1 L = 1000 cm^3), de eis betreft de oppervlakte die minimaal moet zijn.
Voor de inhoud van een cilinder geldt: $I = \pi r^2 h$.
Voor de oppervlakte van een cilinder geldt: $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$.

Omdat gegeven is dat $I = 1000$ cm^3 kun je deze formules gebruiken om A uit te drukken in alleen r.

De formule die je krijgt, kun je op de grafische rekenmachine invoeren. Je vindt dat voor $r \approx 5{,}4$ cm en $h \approx 10{,}8$ cm de totale oppervlakte minimaal is.

Opgave 3

Bekijk het probleem in **Voorbeeld 1**.

a Welke aannames worden er gedaan?

b Hoe kom je aan de formule voor de oppervlakte van het blik?

c Laat zien hoe je de formule voor $A(r)$ kunt afleiden.

d Laat zien hoe je het probleem nu verder oplost.

Opgave 4

Een pakje hagelslag heeft de vorm van een balk met een vierkante bodem. De inhoud is 200 cm^3.

Welke afmetingen heeft het pakje met de kleinste hoeveelheid karton, dus met de kleinste oppervlakte? Geef je antwoord in cm en rond af op één decimaal.

Voorbeeld 2

In een bepaalde supermarkt worden pakken yoghurt verkocht voor € 0,90 per stuk. Er worden elke week ongeveer 1000 pakken yoghurt verkocht. De bedrijfsleider denkt dat hij meer pakken yoghurt kan verkopen als hij de prijs verlaagt. Elke 4 eurocent prijsverlaging kon wel eens een omzetverhoging van 100 pakken betekenen. De pakken yoghurt worden ingekocht voor € 0,60 per stuk.

Is het verstandig om de prijs te verlagen?

Antwoord

Hierbij past een bekend model uit de economie, namelijk dat van de monopolist. De winkelier neemt hier namelijk aan dat er geen concurrentie van andere aanbieders van deze yoghurt is. Zo kan hij rustig de prijs verlagen zonder dat andere winkeliers hem aftroeven. Zijn prijs wordt niet zo laag mogelijk natuurlijk, maar zo gunstig mogelijk: hij wil zo veel mogelijk winst maken.

Bij dit optimaliseringsprobleem is het slim om variabelen te gebruiken. Je hebt meerdere mogelijkheden, bijvoorbeeld:

- x is het aantal pakken yoghurt dat hij zal verkopen;
- x is het aantal extra pakken yoghurt dat hij zal verkopen;
- x is het aantal keren 4 eurocent prijsverlaging die hij toepast.

Bij je keuze hoort een passend rekenmodel, een formule voor de winst afhankelijk van x.
Bedenk daarbij dat de winst W wordt verkregen door de prijs p per stuk te vermenigvuldigen met het aantal pakken yoghurt q dat hij zal verkopen. Trek daar dan weer de kosten K van af: $W = p \cdot q - K$.
Deze variabelen hangen allemaal af van x.

In de opgave bepaal je of het verstandig is om de prijs te verlagen.

Opgave 5

Bekijk het probleem van de winkelier in **Voorbeeld 2**. Kies voor het aantal keren 4 eurocent prijsverlaging die hij toepast de variabele x.

a Leid een formule af voor W afhankelijk van x.

b Is het verstandig om de prijs te verlagen?

Je kunt (zie voorbeeld) ook een andere variabele x noemen.

c Doe dat en laat zien dat je dan een vergelijkbaar resultaat krijgt.

Opgave 6

In een kaasmakerij ligt een voorraad van 600 kg kaas. De bedrijfsleider wil die voor een zo hoog mogelijke totale opbrengst verkopen. Er zijn twee mogelijkheden:

- De kaas ineens verkopen voor € 10,00 per kilo, de partij brengt dan € 6000,00 op.
- De kaas een tijdje laten indrogen; deze verliest dan aan gewicht, maar wint aan smaak. Daardoor neemt de prijs per kilo met € 0,25 per 6 kilo gewichtsvermindering toe.

a Bereken de opbrengst van de partij kaas bij 5 procent indrogen.

b Noem het indrogingspercentage p. Stel een formule op voor de totale opbrengst van de partij kaas als functie van p.

c Bereken het gunstigste indrogingspercentage.

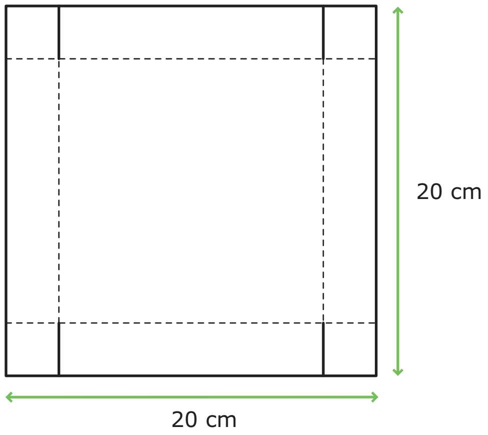
Verwerken

Opgave 7

Van een vierkant stuk karton wordt een bakje gemaakt door in de hoeken vierkantjes in te knippen en de randen om te vouwen. Die vierkantjes dienen dan als plakrandjes.

a Welke formule kun je opstellen voor de inhoud I (cm^3) van dit bakje met x de zijde van het ingeknipte vierkantje?

b Bereken de maximale inhoud van dit bakje in cm^3 nauwkeurig.



Figuur 2

Opgave 8

Een fabriek produceert opvouwbare autopeds voor volwassenen als vervoersmiddel in grotere bedrijfshallen. Het bedrijf heeft als enige producent een monopoliepositie. Daarom hangt de afzet q ($\times 1000$) uitsluitend af van de prijs p in euro: $q = 12 - 0{,}1p$. De kosten voor de productie van deze autopeds zijn gegeven door een door de bedrijfswiskundige opgesteld model: $TK = 1{,}5q^3 - 22{,}5q^2 + 120q$. Hierin is TK gegeven in duizenden euro.

a Toon aan dat geldt: $p = 120 - 10q$. Welke waarden kan q aannemen?

b Stel een formule op voor de opbrengst TO als functie van q.

c Stel een formule op voor de winst TW als functie van de afzet q.

d Bepaal de prijs van één autoped bij maximale winst.

e Geef een formule voor de gemiddelde totale kosten GTK als functie van q. Bepaal bij welke afzet GTK minimaal is.

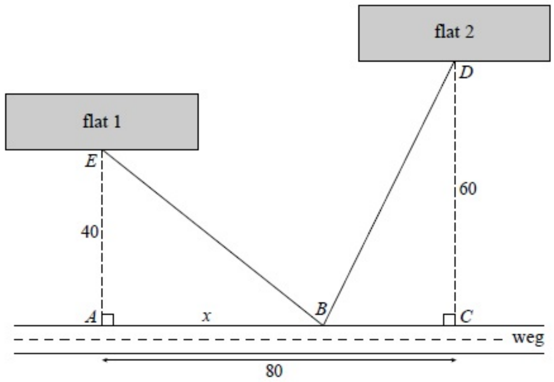
Opgave 9

Iemand bouwt in zijn schuur een rechthoekige opbergbak met bodem en zonder deksel. De breedte van de bak moet 6 dm worden, meer ruimte is er niet. De inhoud van de bak moet 1 m^3 worden. De diepte en de hoogte van de bak kunnen nog variëren.

Bij welke diepte en welke hoogte wordt de totale oppervlakte van de bak minimaal? (Dan zijn waarschijnlijk de materiaalkosten het laagst.) Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

Opgave 10

Langs een rechte weg staan twee flatgebouwen. De ingang van flat 1 (punt E) ligt 40 meter van de weg af en de ingang van flat 2 (punt D) ligt 60 meter van de weg af. Men wil een bushalte plaatsen (punt B) en daarna van de bushalte naar de ingang van elk van de twee flats een recht voetpad aanleggen. Punt A is het punt aan de weg dat het dichtst bij de ingang van flat 1 ligt en punt C is het punt aan de weg dat het dichtst bij de ingang van flat 2 ligt. De afstand tussen punt A en punt C is 80 meter. In de figuur is van deze situatie een schematisch bovenaanzicht getekend. Hierin is x de afstand tussen punt A en de bushalte B in meter.



Figuur 3

Het is mogelijk de bushalte zo te plaatsen dat de twee voetpaden even lang zijn.

a Bereken algebraïsch de waarde van x in deze situatie.

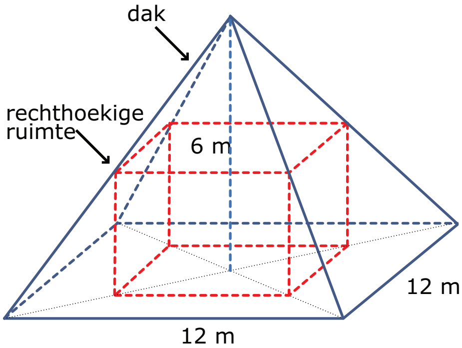
Men wil bij nader inzien de bushalte zo plaatsen dat de totale lengte van de twee voetpaden minimaal is.

b Bereken de totale lengte L in meter.

(naar: examen wiskunde B havo in 2011, eerste tijdvak)

Opgave 11

Onder een piramidevormig dak wil je een rechthoekige ruimte bouwen met een zo groot mogelijke inhoud. In de figuur zie je hoe dit eruit komt te zien. Het grondvlak van de ruimte is een vierkant. De hoogte van de piramide is 6 m.



Figuur 4

Welke afmetingen krijgt deze ruimte?

Toepassen

Opgave 12: Camping

De eigenaar van een camping wil het aantal plaatsen uitbreiden. Hij koopt een hectare grond en wil daarop zuiver vierkante kampeerplaatsen inrichten. Hij heeft echter een deel van de grond nodig voor wegen, toilet- en wasgelegenheid, en dergelijke. Per kampeerplaats schat hij daarvoor zo'n 20 m^2 te moeten reserveren. Verder gaat hij ervan uit dat het bedrag dat hij per plaats kan rekenen, afhangt van de grootte ervan. In elk geval rekent hij per nacht een prijs van € 4,50. Daarbovenop denkt hij nog zo'n € 2,50 per meter breedte te kunnen vragen.
Voor plaatsen van 4 m breed kan hij dan € 14,50 per nacht rekenen. Er kunnen dan wel minder plaatsen op zijn nieuwe terrein. De vraag voor deze campingeigenaar is daarom: 'Hoe breed moet ik mijn kampeerplaatsen maken om zoveel mogelijk aan deze extra hectare grond te verdienen?'

Los dat probleem voor hem op. Schrijf een volledige uitwerking op.

Opgave 13: Kamelen verdelen

Alle 2012 kamelen in Nederland moeten verdeeld worden over 40 weides. Geen twee weides mogen hetzelfde aantal kamelen krijgen. De weide in het centrum van Amsterdam moet het grootste aantal kamelen krijgen.
Hoeveel kamelen moeten daar minimaal komen te staan?

Testen

Opgave 14

Op rechthoekige vellen papier van 1 m^2 worden foto's afgedrukt om posters te maken. Om de foto blijft een rand wit: aan de onderkant een strook van 2 dm breedte, aan de andere drie randen stroken van 1 dm breedte.
Bij welke afmetingen van de poster wordt de oppervlakte van het bedrukte deel zo groot mogelijk?

a Maak een schets van de situatie met de gegevens er in.

b Los het geschetste probleem op.

Opgave 15

Om een rechthoekig sportveld ligt een sintelbaan, bestaande uit twee rechte stukken en twee halve cirkels. De totale lengte van de sintelbaan is 400 m. De afmetingen van het veld zijn zo gekozen dat de oppervlakte van het sportveld maximaal is.

Bereken de afmetingen van dit sportveld in meters nauwkeurig.

Figuur 5