1.1 Evenredigheden

Inleiding

In een vlak landschap wordt het verband tussen de kijkafstand a (in m) en de hoogte h (in m) gegeven door de formule $a = 3573 \cdot h^{\frac{1}{2}}$. Hierin is a recht evenredig met een macht van h, want de variabele h moet tot de macht $\frac{1}{2}$ worden verheven. Je kunt ook zeggen dat h een machtsfunctie is van a. Maar wat betekent $h^{\frac{1}{2}}$ nu eigenlijk?

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- wat recht evenredig met een macht is;
- bij een machtsverband heen en terug te rekenen;
- hoe bij een machtsverband de verandering van de éne variabele samenhangt met die van de andere.

Voorkennis

- werken met functies en grafieken, ook met de grafische rekenmachine;
- vergelijkingen en ongelijkheden oplossen.

Verkennen

Opgave V1

In een vlak landschap wordt het verband tussen de kijkafstand a (in m) en de hoogte h (in m) gegeven door de formule $a = 3573 \cdot h^{\frac{1}{2}}$. Hierin is a recht evenredig met een macht van h, want de variabele h moet tot de macht $\frac{1}{2}$ worden verheven, op je grafische rekenmachine bereken je de uitkomsten van zo'n macht gewoon met de toets voor machtsverheffen, meestal ^.

Welke van de volgende beweringen is waar?

- Als je op een toren van 100 m hoog staat kun je meer dan 30 km ver kijken.
- Op een hoogte van 100 m kun je twee keer zo ver kijken als op een hoogte van 50 m.
- Als je op een toren van 50 m hoog staat kun je (afgerond) 25 km ver kijken.

Uitleg

De functie $y = x^3$ is een typisch voorbeeld van een machtsfunctie: de variabele x moet tot de derdemacht worden verheven om y te krijgen. Als bijvoorbeeld $x = 4$, dan is $y = 4^3 = 64$.

Je zegt ook wel dat y recht evenredig is met de derdemacht van x. Als x^3 bijvoorbeeld twee keer zo groot wordt, dan wordt y ook twee keer zo groot.

Als gegeven is dat $y = 125$, dan kun je x vinden door terug te rekenen vanuit de derdemacht. Dat heet dan de derdemachtswortel: $x = \sqrt[3]{125} = 5$. Als $y = 200$, dan is $x = \sqrt[3]{200} \approx 5{,}848$.

Een andere schrijfwijze voor de oplossing van $x^3 = 200$ is: $x = 200^{\frac{1}{3}}$. Dit is in lijn met de rekenregel $(x^a)^b = x^{ab}$, want $\left(200^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 200^{\frac{1}{3} \cdot 3} = 200$. Dus: $\sqrt[3]{200} = 200^{\frac{1}{3}}$.

Een ander voorbeeld van een machtsfunctie is $y = 2{,}5x^4$. De variabele y is nu recht evenredig met de vierdemacht van x. Je moet de variabele x tot de vierdemacht verheffen en de uitkomst daarvan vermenigvuldigen met de constante 2,5. Deze constante wordt de evenredigheidsconstante genoemd.

Omgekeerd, als bijvoorbeeld gegeven is dat $y = 50$, moet je eerst delen door 2,5 en daarna kun je terugrekenen vanuit de vierdemacht. Dit heet de vierdemachtswortel. Je vindt $x = \sqrt[4]{20} \approx 2{,}115$. De oplossing kun je ook schrijven als $x = 20^{\frac{1}{4}}$.

Opgave 1

Voor de inhoud I van een kubus met ribben van lengte r geldt $I = r^3$.

a Bereken de inhoud van een kubus waarvan de ribben 6 cm zijn.

b Maak de ribbe twee keer zo groot. Wat gebeurt er met de inhoud?

c Bereken hoe groot je de ribbe moet nemen om een kubus te krijgen met een inhoud van 1000 cm^3.

Opgave 2

Als je naar het gewicht van een kubus kijkt, dan moet je rekening houden met de soortelijke massa. Dat is de massa (kg) van 1 dm^3. De soortelijke massa van chroom is 7,19. Voor het gewicht G (kg) van een massieve kubus van chroom met ribben van lengte r (dm) geldt daarom $G = 7{,}19 \cdot r^3$.

a Hoe groot is het gewicht van zo'n kubus als de ribben een lengte van 50 cm hebben?

b Een massieve kubus van chroom heeft een gewicht van 10 kg. Wat is de lengte van een ribbe van deze kubus? Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

c Als je de ribben van een massieve kubus 3 keer zo groot maakt, wat gebeurt er dan met het gewicht?

d IJzer heeft een soortelijke massa van 7,87. Welke formule hoort er bij het gewicht G van een massief ijzeren kubus met ribben van lengte r?

Opgave 3

Ook het verband tussen de ribbelengte r en de oppervlakte A van een kubus is een machtsverband.

a Leg uit waarom $A = 6 \cdot r^2$.

b Is de oppervlakte A recht evenredig met de tweedemacht van r? Of is r recht evenredig met de tweedemacht van A?

c Bereken de oppervlakte van een kubus waarvan de ribben 5 cm zijn.

d Als je een kubus wilt krijgen waarvan de oppervlakte twee keer zo groot is. Hoeveel keer zo groot moeten dan de ribben van de kubus worden?

e Leid een formule af die de ribbelengte uitdrukt in de oppervlakte.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: machtsfuncties

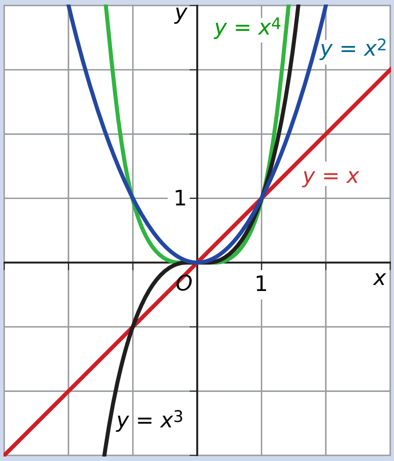
Als y **recht evenredig met een macht** van x is, dus $y = c \cdot x^p$, dan spreek je van een machtsfunctie. De constante c is de evenredigheidsconstante.

Je ziet voorbeelden van grafieken van machtsfuncties.

Vanuit de machtsfunctie $y = x^p$ (dus als $c = 1$) kun je op twee manieren terugrekenen:

$x = \sqrt[p]{y}$

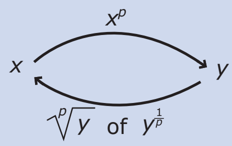
$x = y^{\frac{1}{p}}$



Figuur 2

Afhankelijk van de waarde van p heb je één of twee antwoorden. Als de **evenredigheidsconstante** niet de waarde 1 heeft, deel je eerst door c. Daarna pas je ofwel de p-demachtswortel toe, ofwel je werkt met de omgekeerde macht.

Voor elke x en voor willekeurige reële getallen a en b gelden de volgende



Figuur 3

eigenschappen van machten en exponenten		
$x^0 = 1$	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ mits $x \neq 0$	$x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$ mits $x \geq 0$ en $a > 0$
$x^{a+b} = x^a \cdot x^b$	$x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b}$ mits $x \neq 0$	$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

Voorbeeld 1

Gegeven is dat de variabele Z recht evenredig is met de zesdemacht van de variabele t en dat de evenredigheidsconstante $\frac{5}{8}$ is.

Omgekeerd is t ook recht evenredig met een macht van Z. Welke macht? Geef ook de bijbehorende evenredigheidsconstante in drie decimalen nauwkeurig.

Antwoord

Uit de gegevens volgt dat $Z = \frac{5}{8} \cdot t^6$. Om antwoord te geven op de vraag ga je terugrekenen:

$$\frac{5}{8}t^6 = Z$$

delen door $\frac{5}{8}$

$$t^6 = \frac{8}{5} \cdot Z$$

terugrekenen vanuit zesdemacht

$$t = \left(\frac{8}{5} \cdot Z\right)^{\frac{1}{6}}$$

Je vindt: $t \approx 1{,}081 \cdot Z^{\frac{1}{6}}$. Dus t is recht evenredig met $Z^{\frac{1}{6}}$.
De evenredigheidsconstante is ongeveer 1,081.

Opgave 4

Bij welke van de formules is y recht evenredig met een macht van x? Geef in dat geval de evenredigheidsconstante. Rond indien nodig af op drie decimalen nauwkeurig.

a $y = 0{,}8x$

b $y = 33x^4 - 10$

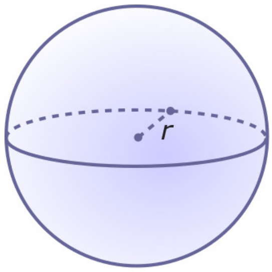
c $y = 0{,}005x^8$

d $x = 20y^5$

e $y = 25x^2 \cdot 3 \cdot x^3$

Opgave 5

De inhoud I van een bol is recht evenredig met de derdemacht van de straal r: $I = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.



Figuur 4

a Hoe groot is de evenredigheidsconstante?

b Bereken de inhoud van een bol waarvan de straal 10 cm is.

c Bereken de straal van een bol waarvan de inhoud 1000 cm^3 is. Geef je antwoord in cm, en rond af op één decimaal.

d r is ook recht evenredig met een macht van I. Welke macht? Geef ook de bijbehorende evenredigheidsconstante in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 6

Ook het verband tussen de straal r en de oppervlakte A van een bol is een recht evenredig verband met een macht. De bijbehorende formule is: $A = 4\pi r^2$

a Bereken exact de oppervlakte van een bol met een straal van 6 cm.

b Hoe groot moet de straal worden om een bol te krijgen met een vier keer zo grote oppervlakte?

c Laat zien dat de straal recht evenredig is met een macht van de oppervlakte. Bereken ook de exacte evenredigheidsconstante.

Voorbeeld 2

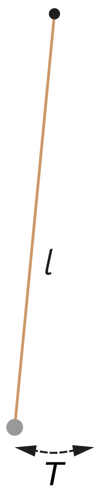
Als je een gewichtje laat slingeren aan een koord met een verwaarloosbare massa, ontstaat er een zuivere slingerbeweging. De slingertijd (of periode) is de tijd waarin de slinger een complete slingerbeweging uitvoert. Daarin beweegt het gewichtje bijvoorbeeld van links naar rechts en weer terug. De slingertijd is niet afhankelijk van de zwaarte van het gewicht dat je aan het koord hangt. Dit betekent dat verschillende gewichten bij eenzelfde lengte van het koord, dezelfde slingertijd hebben.

Als de uitwijking van de slingerbeweging niet te groot is, dan geldt voor de slingertijd bij benadering de formule:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Hierin is T de slingertijd in seconden, l de lengte van het koord in meter en g de valversnelling in m/s^2. Op aarde is de valversnelling gemiddeld ongeveer 9,81 m/s^2.

Bereken de slingertijd bij een koord van 20 cm. Bereken ook de lengte van het koord als de slingertijd 2 seconden is.



Figuur 5

Antwoord

Bij een koord van 20 cm geldt: $T = 2\pi\left(\frac{l}{9{,}81}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\pi\left(\frac{0{,}20}{9{,}81}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0{,}90$.

De slingertijd is dan ongeveer 0,90 seconde.

Neem je omgekeerd voor de slingertijd $T = 2$, dan geldt: $T = 2\pi\left(\frac{l}{9{,}81}\right)^{\frac{1}{2}} = 2$.

Delen door 2π en vervolgens kwadrateren geeft $\frac{l}{9{,}81} \approx 0{,}101$ en dus $l \approx 0{,}99$.

De lengte van het touw is dan ongeveer 1 meter.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** is de formule $T = 2\pi\left(\frac{l}{9{,}81}\right)^{\frac{1}{2}}$ gegeven.

a T is recht evenredig met $l^{\frac{1}{2}}$. Toon aan dat de evenredigheidsconstante ongeveer 2,006 is.

b l is ook recht evenredig met T^2. Toon dit aan en geef de evenredigheidsconstante in drie decimalen nauwkeurig.

c Hoeveel bedraagt de slingertijd als de lengte van het koord 10 cm is?

d Hoe groot is de lengte van het koord in meter als de slingertijd 8 seconden is?

Voorbeeld 3

De Duitse fysioloog Karl Meeh deed onderzoek naar het verband tussen lichaamsgewicht en huidoppervlakte van verschillende diersoorten. De grootte van de huidoppervlakte is van belang bij het warmteverlies van het dier. Diersoorten met een, in verhouding tot hun inhoud, relatief grote huidoppervlakte zullen meer energie nodig hebben om op temperatuur te blijven. Ze zullen dan ook in verhouding meer moeten eten. Meeh heeft een formule gevonden die het verband tussen gewicht en huidoppervlakte aangeeft: $H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$.

Hierin is H de huidoppervlakte (dm^2) en G het gewicht (kg) van het dier.

Je ziet dat voor dit verschijnsel de huidoppervlakte recht evenredig is met de $\frac{2}{3}$-macht van het lichaamsgewicht.

dier	c
muis	9,0
kat	10,0
konijn	9,8
schaap	8,4
koe	9,0
paard	10,0
mens	11,2
egel	7,5
vleermuis	57,5

Tabel 1

De factor c is de evenredigheidsconstante en verschilt per diersoort. In de biologie wordt deze evenredigheidsconstante de meeh-coëfficiënt genoemd. In de tabel is voor een aantal diersoorten de meeh-coëfficiënt gegeven.

Voor elk diersoort kun je een grafiek tekenen. Je ziet dan dat het verband dat Meeh gevonden heeft vooral aangeeft dat hoe zwaarder een dier is, hoe groter de huidoppervlakte is. Dat is logisch, maar je ziet dan ook dat de huidoppervlakte minder snel toeneemt dan het gewicht: de stijging neemt af. Dat komt door de macht in de formule.

Als je de formule die bij een egel hoort, omrekent zodat het lichaamsgewicht uitgedrukt wordt in de huidoppervlakte, wat wordt dan de evenredigheidsconstante?

Antwoord

$H = 7{,}5 \cdot G^{\frac{2}{3}}$. Voor het omrekenen maak je gebruik van: $\left(G^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = G$.

$$\begin{aligned} 7{,}5 \cdot G^{\frac{2}{3}} &= H \\ G^{\frac{2}{3}} &= \frac{H}{7{,}5} \\ G &= \left(\frac{H}{7{,}5}\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Je vindt $G \approx 0{,}049 H^{\frac{3}{2}}$. Dus de evenredigheidsconstante is ongeveer 0,049.

Opgave 8

In **Voorbeeld 3** wordt een verband tussen huidoppervlakte en lichaamsgewicht beschreven.

a Voor elk diersoort is er een constante c. Hoe wordt deze constante genoemd?

In deze tabel zie je een vijftal waarden van G en H van Schotse Hooglanders, een soort koeien.

b Bepaal de meeh-coëfficiënt van de Schotse Hooglander.

c De huid van een bepaalde Schotse Hooglander heeft een oppervlakte van ongeveer 510 dm^2. Hoe zwaar is die koe in kg nauwkeurig?

d Als je deze formule omrekent zodat het lichaamsgewicht van een Schotse Hooglander uitgedrukt wordt in de huidoppervlakte, wat wordt dan de evenredigheidsconstante? Rond af op drie decimalen.

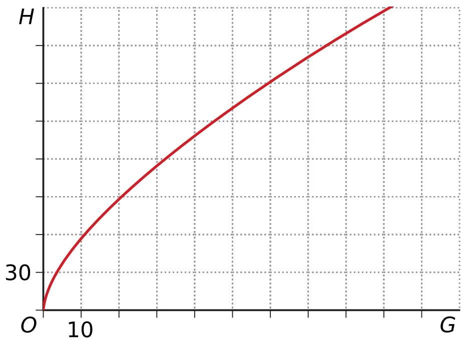
e Als het lichaamsgewicht twee keer zo groot wordt, wordt de huidoppervlakte dan meer of minder dan twee keer zo groot?

Hooglander	
G	H
430	507
450	523
490	553
500	560
420	500

Tabel 2

Opgave 9

Je ziet de grafiek die het verband aangeeft tussen de huidoppervlakte H (dm^2) en het gewicht G (kg) van een aap.



Figuur 6

Bereken de meeh-coëfficiënt die hoort bij een aap.

Opgave 10

Ook voor een massieve bol beschrijft de formule van Meeh het verband tussen de oppervlakte A en het gewicht G. Ga uit van een massieve ijzeren bol. De soortelijke massa van ijzer is 7,9 g/cm^3.

Gebruik de formules voor de inhoud I en oppervlakte A van een bol met straal r: $I = \frac{4}{3}\pi r^3$ en $A = 4\pi r^2$.

a Welke formule geldt voor het gewicht G als functie van de straal r van de bol? Neem r in cm en G in g.

b Door de formules voor het gewicht en de oppervlakte van een bol met straal r te combineren vind je $A = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$. Bepaal de waarde van c in twee decimalen nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 11

Gegeven is de machtsfunctie $y = 64x^7$.

a Is y recht evenredig met een macht van x? Zo ja, geef de evenredigheidsconstante.

b Bereken $y(0{,}5)$.

c Voor welke waarde van x is $y = 15000$? Rond af op drie decimalen.

d Als de waarde van x vier keer zo groot wordt, met hoeveel wordt de bijbehorende y-waarde dan vermenigvuldigd?

Opgave 12

Voor de inhoud V van een kegel waarvan de hoogte net zo groot is als de straal r van het grondvlak, geldt de formule: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^3$

a V is recht evenredig met r^3. Wat is de exacte evenredigheidsconstante?

b Bereken de inhoud van zo'n kegel waarbij het grondvlak een diameter heeft van 10 cm.

c r is ook recht evenredig met een macht van V. Welke macht? Geef ook de evenredigheidsconstante in drie decimalen nauwkeurig.

d Bereken r als gegeven is dat de inhoud van een kegel 500 cm^3 is. Geef je antwoord in cm, en rond af op één decimaal.

Opgave 13

Bij welke van de formules is y recht evenredig met een macht van x? Geef in dat geval de evenredigheidsconstante. Rond indien nodig af op drie decimalen.

a $y = 125x^{12} + x$

b $x = 0{,}5 \cdot y^{\frac{5}{7}}$

c $y = 525 \cdot x^{0{,}55}$

d $x = 50y^{1{,}5} - 2$

e $y = \frac{30x^7}{3x^3}$

Opgave 14

Er is een verband tussen de snelheid s (km/h) van een auto en de bijbehorende remweg r (m). De remweg is de afstand die de auto nog aflegt als je zo hard mogelijk remt. Een vuistregel op een nat wegdek voor dit verband is: $r = \frac{3s^2}{200}$

a r is recht evenredig met een macht van s. Wat is de evenredigheidsconstante?

In een weg zit een scherpe bocht waarin je maar 12 meter vooruit kunt kijken. Een eis voor veilig rijden is dat je moet kunnen stoppen binnen de afstand die je kunt overzien.

b Wat is volgens deze vuistregel de maximumsnelheid in deze bocht?

c Geef de formule waarmee de snelheid wordt uitgedrukt in de remweg. Wat voor verband is dit?

d Bij c heb je als het goed is een formule gevonden waarbij s recht evenredig is met een macht van r. Wat is de exacte waarde van de evenredigheidsconstante?

e Geef commentaar op de volgende uitspraak: ‘Bij een zicht van 100 meter kun je tweemaal zo hard rijden als bij een zicht van 50 meter.’

Opgave 15

Om elektriciteit op te wekken, worden in gebieden waar het veel waait windmolenparken aangelegd. Windmolens zetten windenergie om in elektrische energie. Steeds vaker worden windmolenparken in zee aangelegd, omdat het boven open zee meestal harder waait dan boven land. Ook boven zee waait het echter niet altijd even hard en dat heeft gevolgen voor de hoeveelheid opgewekte elektrische energie.
De hoeveelheid energie die door wind wordt opgewekt, is evenredig met de derdemacht van de windsnelheid.
Een kleine afname in de windsnelheid levert al een relatief grote afname in de hoeveelheid opgewekte energie op.

a Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid opgewekte energie daalt als de windsnelheid afneemt van 10,0 m/s naar 9,5 m/s. Rond je antwoord af op een geheel getal.

b Bereken met hoeveel procent de windsnelheid moet toenemen om twee keer zo veel energie op te wekken. Rond je antwoord af op een geheel getal.

(bron: pilotexamen wiskunde havo B in 2012, tweede tijdvak)

Toepassen

Opgave 16: De wet van Kleiber

De Amerikaanse veearts en onderzoeker Max Kleiber ontdekte in 1932 dat het zuurstofverbruik Z (L) van verschillende soorten zoogdieren recht evenredig is met een macht van de massa m (kg). In de tabel vind je enkele bijpassende gegevens.

soort	m (kg)	Z (L)
muis	0,20	0,19
rat	1,10	0,75
kat	5,80	2,62
hond	11,5	4,38
mens	76,1	18,0
paard	605,0	85,4

Tabel 3

a Stel een formule op voor Z afhankelijk van m. Gebruik daarvoor de gegevens van de muis en het paard.

Kleiber vond de formule: $Z \approx 0{,}7 \cdot m^{0{,}75}$.

b Als je de gegevens van de rat en de mens gebruikt, vind je dan dezelfde evenredigheidsconstante als Kleiber?

c Bereken met de formule van Kleiber het zuurstofverbruik van een koe van 1000 kg. Geef je antwoord in L nauwkeurig.

Opgave 17: Oppervlakte en inhoud cilinder

Van een cilinder is r de straal van het grondvlak. De cilinder is even breed als hoog.

Toon aan dat tussen de oppervlakte A en de inhoud V van zo'n cilinder een machtsverband bestaat van de vorm $A = c \cdot V^{\frac{2}{3}}$. Bereken ook in drie decimalen nauwkeurig de waarde van c.

Testen

Opgave 18

Gegeven is een machtsfunctie door de formule $y = 5 \cdot (3x)^4$.

a y is recht evenredig met een macht van x. Hoe groot is de evenredigheidsconstante?

b Voor welke waarden van x is $y = 120000$?

c Als de waarde van x vier keer zo groot wordt, met hoeveel wordt de bijbehorende functiewaarde dan vermenigvuldigd?

Opgave 19

Ga uit van een massieve ijzeren kubus met ribbe r in cm. De soortelijke massa van ijzer is 7,9 g/cm^3.

a Stel een formule op voor het gewicht G in gram van de kubus als functie van r in cm.

b Een kubus heeft een gewicht van 500 gram. Bereken r in mm nauwkeurig.

c Geef een formule voor r als functie van G.

d r is recht evenredig met $G^{\frac{1}{3}}$. Bereken de bijbehorende evenredigheidsconstante in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 20

Ga weer uit van een massieve ijzeren kubus met straal r in cm. De soortelijke massa van ijzer is 7,9 g/cm^3. G stelt het gewicht van deze kubus in gram voor.

a Stel een formule op voor de oppervlakte A van de kubus als functie van r in cm.

b Leid een formule af van de vorm $A = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$. Bepaal de evenredigheidsconstante c in twee decimalen nauwkeurig.

c Bereken het gewicht van zo'n kubus als de totale buitenoppervlakte 150 cm^2 is.

d r is recht evenredig met $G^{\frac{1}{3}}$. Bereken de bijbehorende evenredigheidsconstante in twee decimalen nauwkeurig.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.