3.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Meetkundige berekeningen**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- vector, lengte, richtingshoek — kentallen en componenten van een vector — vectoren optellen, aftrekken en scalair vermenigvuldigen — inproduct van twee vectoren
- driedimensionaal cartesisch assenstelsel — coördinaten en vectoren in zo'n 3D-assenstelsel — lengte van een vector in 3D
- inproduct van twee vectoren in 3D — richtingsvector van een lijn
- onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken — snijdende, kruisende, evenwijdige en samenvallende lijnen — afstand tussen meetkundige figuren
- hoeken en afstanden tussen meetkundige figuren

Activiteitenlijst

- werken met vectoren
- in een 3D-assenstelsel coördinaten aflezen en vectoren van kentallen voorzien — meetkundige figuren gegeven door coördinaten van (enkele) hoekpunten tekenen in een 3D-assenstelsel
- inproduct gebruiken om de hoek tussen twee vectoren te berekenen — de hoek tussen twee lijnen berekenen
- de onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken herkennen en benoemen
- hoeken en afstanden tussen meetkundige figuren herkennen en berekenen

Achtergronden

Sir William Rowan Hamilton (1805—1865) was een Ierse wiskundige, natuurkundige en astronoom die belangrijke bijdragen leverde aan de ontwikkeling van de optica, dynamica en algebra.

Hamilton was de eerste die het begrip **vector** introduceerde.
Hij werkte daarmee in drie dimensies en voor hem was een vector een pijl vanuit de oorsprong van een driedimensionaal assenstelsel naar een punt in de ruimte.

Hamilton werd in het bijzonder bekend door het hamiltonformalisme (een wiskundig nauwkeurige herformulering van de klassieke mechanica) en de door hem uitgedachte quaternionen (een vierdimensionale uitbreiding van de getallentheorie).

Figuur 1

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de vectoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a Bereken exact de lengte van beide vectoren.

b Bereken de hoek tussen de vectoren. Rond af op één decimaal.

c Geef een vector die loodrecht staat op $\vec{w}$.

d Geef de kentallen van vector $\vec{z} = \vec{v} - 3\vec{w}$.

Opgave 2

Gegeven is een prisma $OABC.DEFG$, waarin $OAED$ en $OCGD$ vierkanten zijn met zijden van 8 cm. Punt M is het midden van AE en punt N ligt op CG zo, dat $|CN| = 2$ cm. S is het snijpunt van OB en AC en T is het snijpunt van DF en EG.

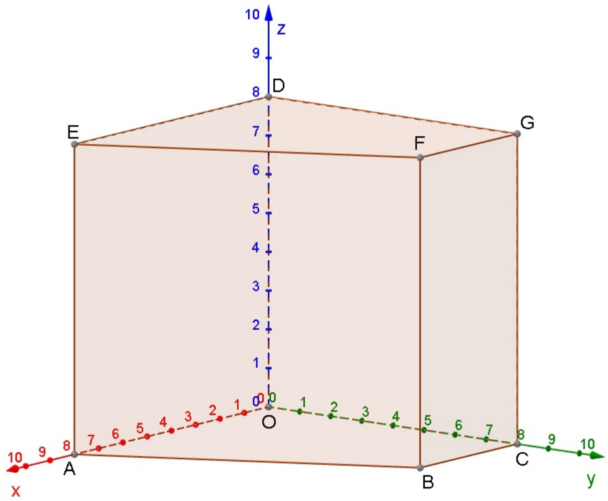
a Bereken exact $|OS|$.

b Lijn OT snijdt lijn BF in punt P. Bereken $|BP|$.

c Beredeneer dat de lijnen MN en OD elkaar kruisen en bereken hun onderlinge afstand.

d Bereken de hoek die de lijnen MN en OD met elkaar maken in graden nauwkeurig.

e Bereken de hoek die de vlakken $ABFE$ en $OCGD$ met elkaar maken in graden nauwkeurig.



Figuur 2 Figuurapplet

Opgave 3

De afgeknotte piramide $OABC.DEFG$ is in een cartesisch assenstelsel gegeven door $A(4,0,0)$, $B(8,4,0)$, $C(4,8,0)$, $D(0,4,0)$, $E(3,1,6)$ en $H(0,4,6)$.

Bepaal de coördinaten van de punten F en G.

Opgave 4

Gegeven zijn de punten $A(2,5,-4)$, $B(-5,3,8)$ en $C(0,2,-2)$.

a Bereken exact de lengte van de vector $\overrightarrow{AB}$.

b Bereken de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$.

c Geef een punt D waarvoor geldt dat $\overrightarrow{AD}$ loodrecht staat op $\overrightarrow{AB}$.

Opgave 5

Gegeven zijn de punten $A(6,5,0)$, $B(-6,5,0)$, $C(-6,-5,0)$, $D(6,-5,0)$, $E(3,0,6)$ en $F(-3,0,6)$. $ABCD$ is het grondvlak (de zoldervloer) van de zolder van een boerderij waarvan EF de nok van het dak is. Het dak bestaat uit twee symmetrische trapezia $ABFE$ en $CDEF$ en twee gelijkbenige driehoeken DAE en BCF. Alle afmetingen zijn in m.

a Bereken exact de totale oppervlakte van het dak.

b Bereken de hoek die de twee grootste vlakken waaruit het dak bestaat, met elkaar maken.

c Bereken de afstand tussen de lijnen AE en CF. Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

d Bereken in cm nauwkeurig de afstand tussen punt D en vlak DAE.

Opgave 6

Van een regelmatig driezijdig prisma $ABC.DEF$ zijn de driehoeken ABC en DEF gelijkzijdig. De drie opstaande vlakken zijn congruente rechthoeken. $|AB| = 6$ en $|AD| = 3$. Gegeven zijn $A(0,-3,0)$ en $B(0,3,0)$. P is het midden van AB, Q dat van BC en R dat van CF.

a Bereken de afstand tussen de kruisende lijnen AD en PR.

b Construeer de doorsnede van vlak PQR met het prisma.

c Teken de in b bedoelde doorsnede op ware grootte. Schrijf de daartoe noodzakelijke berekeningen op.

d Bereken de hoek die vlak PQR met het grondvlak ABC maakt.

e Bereken de afstand van punt F tot vlak PQR.

Opgave 7

De afgeknotte piramide $OABC.DEFG$ is in een cartesisch assenstelsel gegeven door $A(4,0,0)$, $B(8,4,0)$, $C(4,8,0)$, $D(0,4,0)$, $E(3,1,6)$ en $H(0,4,6)$. M is het midden van BT en N is het midden van DT.

a Bepaal de coördinaten van de punten F en G.

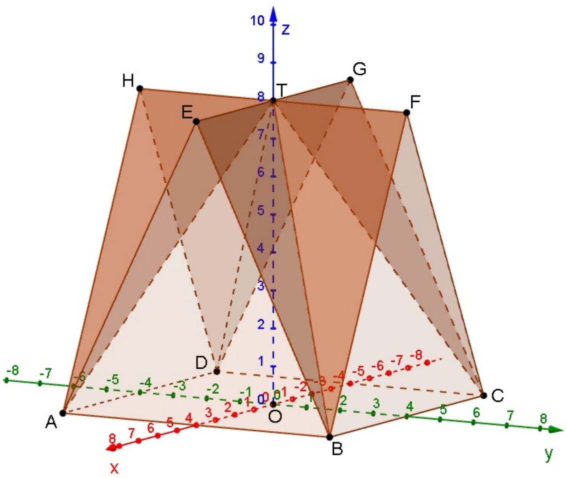
b Bereken in graden nauwkeurig de hoek die de lijnen BF en DH met elkaar maken.

c Bereken de afstand tussen de lijnen BF en AC.

d Bereken de afstand van punt F tot vlak $ACGE$.

Opgave 8

Je ziet hier een schematische tekening van het vakantiehuisje 'Heideheuvel'. Alle zijvlakken (opstaande muren) zijn gelijkbenige driehoeken met een hoogte van 8 m en staan loodrecht op het vierkante grondvlak $ABCD$ van 8 bij 8 m. Voor het gemak hebben de hoekpunten letters gekregen, zie figuur. Punt T ligt op de z-as en punt O is het snijpunt van AC en BD. De x-as gaat door O en het midden van AB, de y-as door O en het midden van BC.



Figuur 3 Figuurapplet

a Bereken de totale dakoppervlakte van deze vakantiewoning.

b Bereken de totale inhoud van deze vakantiewoning.

c Bereken de hoek die lijn BT met het grondvlak maakt.

d Bereken de hoek die de twee aangrenzende vlakdelen BTE en BFT met elkaar maken.

Opgave 9

Van piramide $O.ABCD$ is het grondvlak een vierkant met $A(12,0,0)$ en $C(0,12,0)$. P is het punt $(3,0,0)$.

a Bereken de grootte van $\angle DPB$ in graden nauwkeurig.

b Bereken de afstand van P tot lijn BC in twee decimalen nauwkeurig.

c Het vlak V met alle punten waarvoor geldt $x = 3$ gaat door punt P. Dit vlak snijdt de piramide volgens vijfhoek $PQRST$. Teken deze vijfhoek in de piramide en bereken de oppervlakte ervan.

Toepassen

Opgave 10: De vijf regelmatige lichamen

Al in de Oudheid was bekend dat er precies vijf **regelmatige lichamen** zijn. Dat zijn lichamen waarvan alle ribben en alle vlakken en alle hoeken gelijk zijn. Hier zie je er fraaie animaties van, die zijn gemaakt door Rüdiger Appel. Bekijk zijn website maar eens, je vind er deze figuren onder de naam 'Platonic Solids' (dat is Engels voor 'Platonische lichamen').
Je ziet in de applet (van links naar rechts) het tetraëder (regelmatig viervlak), de kubus (hexaëder, of regelmatig zesvlak), het octaëder (regelmatig achtvlak), het dodecaëder (regelmatig twaalfvlak) en het icosaëder (regelmatig twintigvlak).

Bekijk de applet.

Als je hun hoekpunten, hun ribben en hun grensvlakken telt, kom je tot:

aantal grensvlakken + aantal hoekpunten = aantal ribben + 2

Is dat toeval? Of kun je het verklaren?
En waarom zijn er niet meer dan vijf?

a Neem $r = 4$ en teken van het regelmatig viervlak, de kubus en het regelmatig achtvlak een dwarsdoorsnede waar minstens één ribbe een zijde van is en die door de draaias van de figuur gaat. Als je er zin in hebt moet je vooral ook proberen om dit in het regelmatig twaalfvlak en het regelmatig twintigvlak te doen!

b Druk bij het regelmatig viervlak, de kubus en het regelmatig achtvlak de hoogte uit in r.
De andere twee zijn erg moeilijk, een echte uitdaging!

c Kun je verklaren waarom er niet meer dan vijf regelmatige lichamen zijn? (Tip: Denk aan de hoeken die in een hoekpunt bij elkaar komen.)

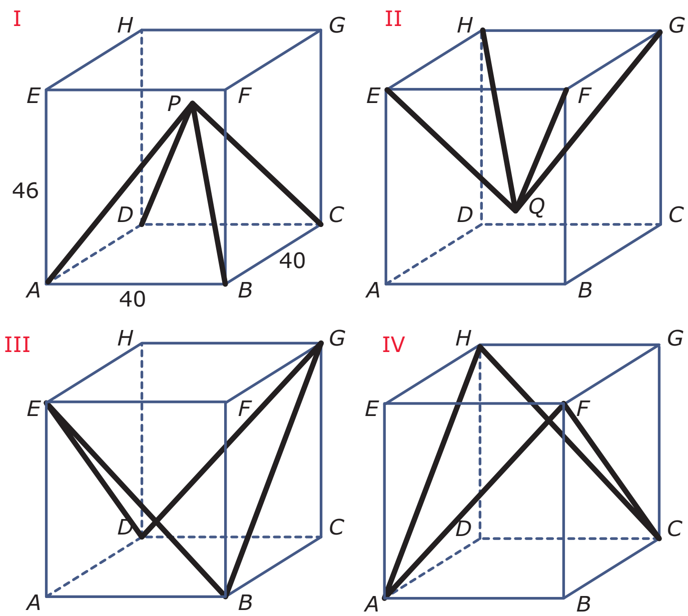
d Probeer een verklaring te vinden voor de formule van Euler:
aantal grensvlakken + aantal hoekpunten = aantal ribben + 2

Examen

Opgave 11: Tafeltje

Op de foto hiernaast staat de afbeelding van een tafeltje. Het tafeltje bestaat uit een aluminium onderstel met daarop een glazen plaat. De vragen gaan over het onderstel. Dit bestaat uit een aantal staven. Uit de foto is moeilijk op te maken hoe het onderstel precies in elkaar zit. De figuur hieronder geeft hierover meer duidelijkheid door het verdelen van de staven over de figuren I, II, III en IV.

Figuur 4



Figuur 5

Het onderstel past in zijn geheel precies in een denkbeeldige balk $ABCD.EFGH$. Als de vier figuren in elkaar worden geschoven, ontstaat een tekening van het volledige onderstel. Bij de punten E, F, G en H van het onderstel kan de glazen plaat worden vastgemaakt.
In de volgende vragen wordt de dikte van de staven verwaarloosd.
De afmetingen van de balk $ABCD.EFGH$ zijn $40 \cdot 40 \cdot 46$ cm. Zie de figuren I en II.

Punt P ligt 13 cm onder het midden van het bovenvlak van de balk; punt Q ligt 13 cm boven het midden van het grondvlak.

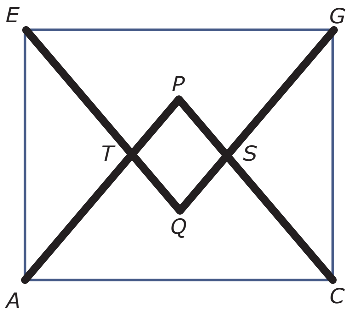
a Teken het bovenaanzicht van het volledige onderstel op schaal 1 : 10. Zet alle letters erbij.

b Bereken de totale lengte aluminium staaf die in het onderstel verwerkt is. Geef je antwoord in gehele centimeters nauwkeurig.

Hiernaast is het diagonaalvlak $ACGE$ getekend met de vier staven die in dit vlak liggen. In het snijpunt S van de lijnen PC en QG zijn in werkelijkheid de twee staven door middel van een pennetje met elkaar verbonden. Om dit mogelijk te maken moest er in iedere staaf een gaatje geboord worden op een bepaalde afstand van de eindpunten.

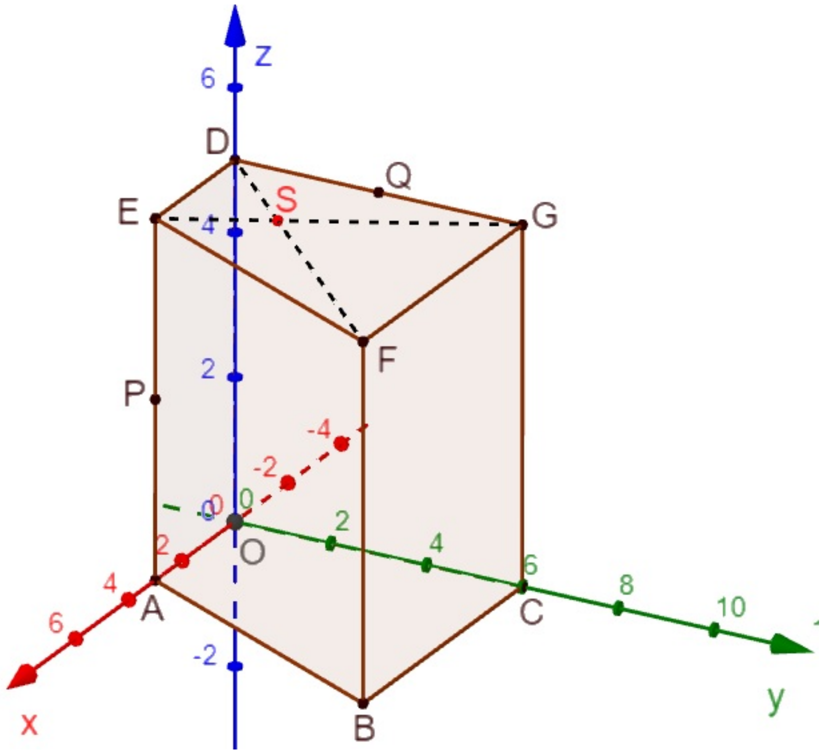
c Bereken de afstand QS. Geef je antwoord in gehele millimeters nauwkeurig.

(bron: herexamen wiskunde B1,2 havo 2000, opgave 5)

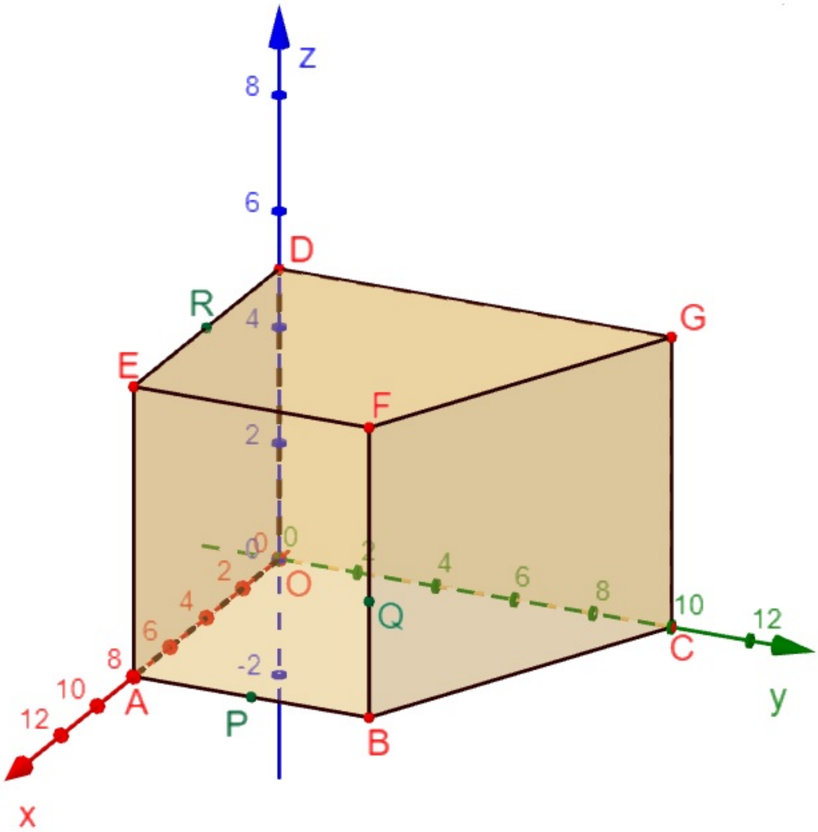


Figuur 6

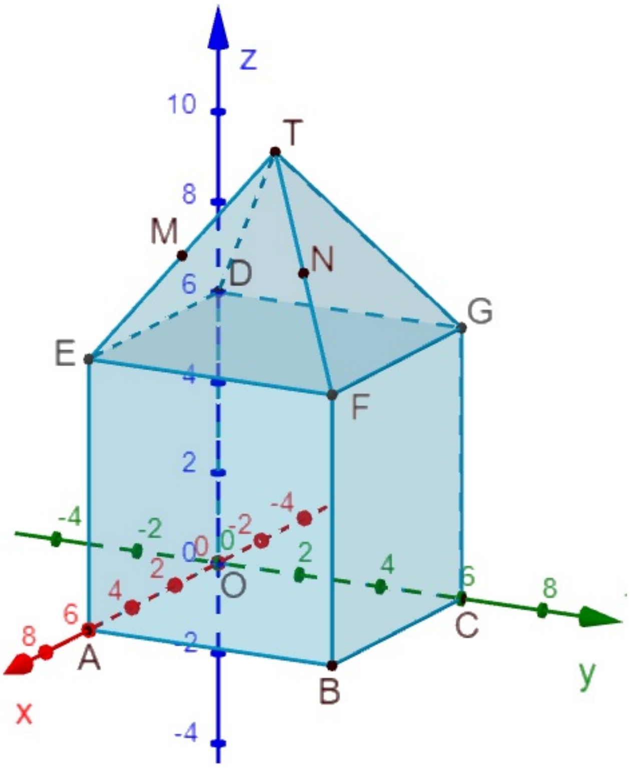
Werkblad bij.



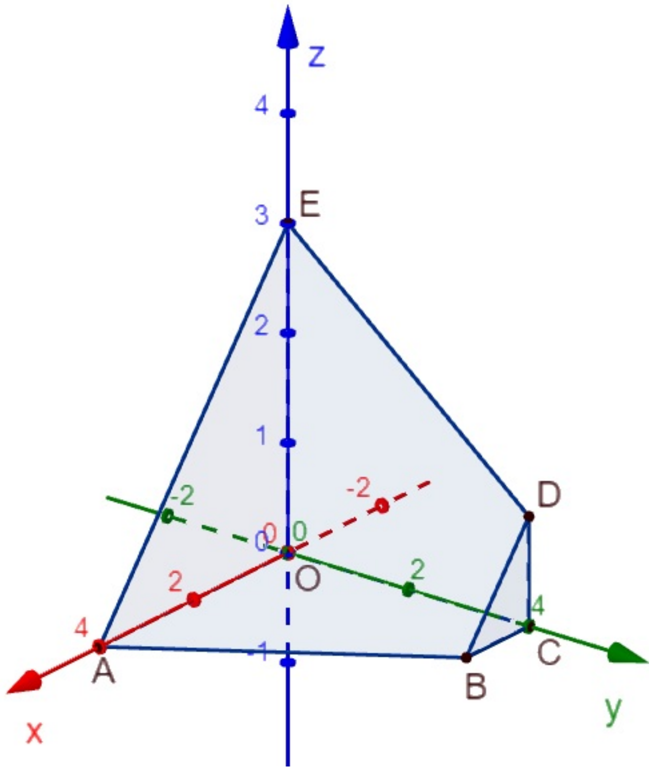
Werkblad bij.



Werkblad bij.



Werkblad bij.



Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.