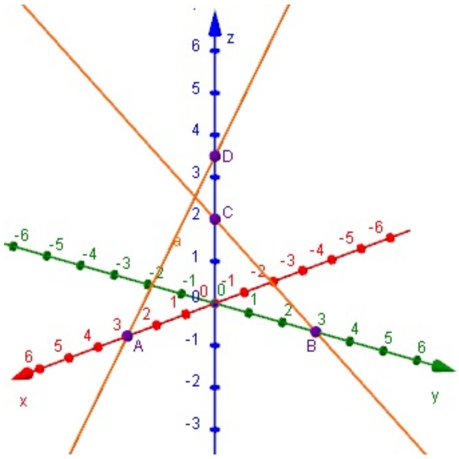
3.5 Hoeken en afstanden

Inleiding

Nu je meer weet over de onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken kun je beter hoeken en afstanden berekenen. Je gebruikt bij het berekenen van hoeken vooral het inproduct van twee vectoren. Bij het berekenen van (kortste) onderlinge afstanden moet je vaak werken met goed gekozen aanzichten.
Over dergelijke vragen gaat dit onderdeel...



Figuur 1 Figuurapplet

Je leert in dit onderwerp

- de hoek tussen twee lijnen, lijn en vlak, twee vlakken berekenen;
- hoeken in ruimtelijke figuren berekenen;
- de afstand tussen twee evenwijdige en tussen twee kruisende lijnen berekenen;
- de afstand van een punt tot een vlak en van een lijn tot een daarmee evenwijdig vlak berekenen.

Voorkennis

- met vectoren rekenen in 3D, het inproduct van twee vectoren gebruiken;
- werken met aanzichten van ruimtelijke figuren.

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je een constructie met staalkabels en vier stalen masten in een driedimensionaal cartesisch $Oxyz$-assenstelsel. Alle masten zijn evenwijdig aan de z-as en 5 m hoog. De constructie dient ter ondersteuning van een grote tent met een vierkant grondvlak van 10 m bij 10 m.

Punt P heeft de coördinaten (4,4,5), punt Q is (6,4,5).

a Hoe ver ligt punt P van lijn BR?

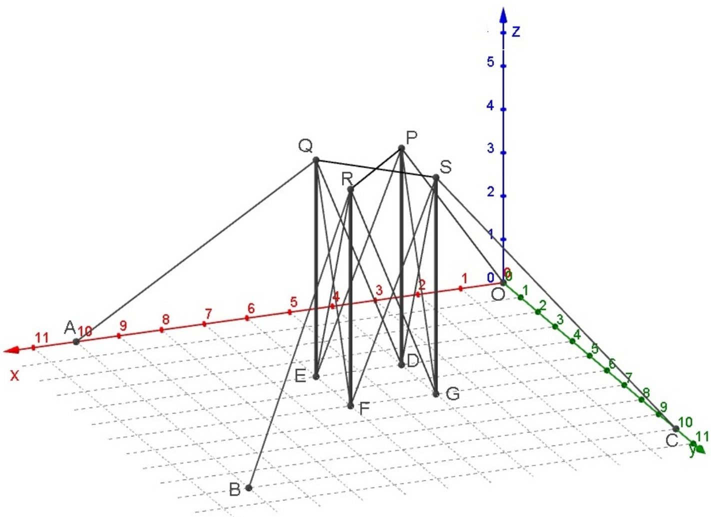
b Hoe ver liggen de lijnen EP en GR van elkaar?

c Hoe groot is de (kortste) afstand tussen de lijnen BR en GS?

d Hoe groot is de hoek die de lijnen BR en GS met elkaar maken?

e Hoe groot is de hoek die BR maakt met het grondvlak $OABC$?

f Hoe ver ligt punt F van vlak $BCSR$ af?

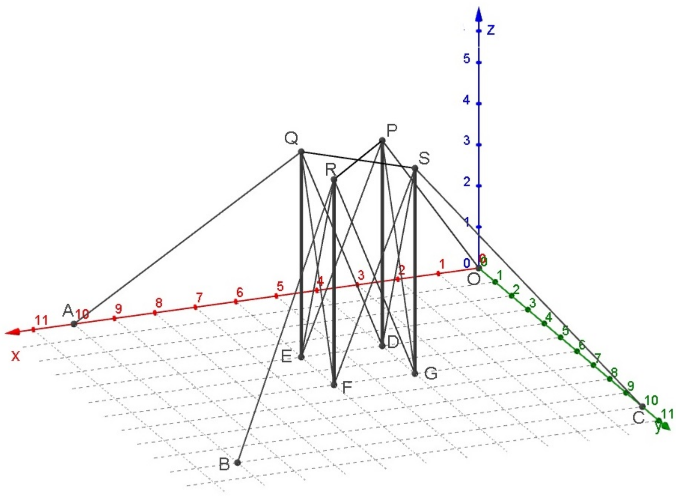


Figuur 2 Figuurapplet

Uitleg 1

Hier zie je een constructie met staalkabels en vier stalen masten in een driedimensionaal cartesisch $Oxyz$-assenstelsel. Alle masten zijn evenwijdig aan de z-as en 5 m hoog. De constructie dient ter ondersteuning van een grote tent met een vierkant grondvlak van 10 m bij 10 m.

Punt P heeft de coördinaten (4,4,5), punt Q is (6,4,5). In de figuur komen allerlei afstanden voor. Bij afstand is de vaste afspraak dat het altijd gaat om de kortste afstand. Die wordt meestal loodrecht op een lijn of een vlak gemeten.



Figuur 3 **Figuurapplet**

Wil je weten hoe ver punt P van lijn BR af ligt, dan teken je vlak $OBPR$. Daarin teken je een lijnstuk vanuit P loodrecht op BR. De gevraagde afstand is de lengte van dat lijnstukje is 2.

Wil je de afstand tussen de kruisende lijnen BR en GS bepalen, dan merk je op dat GS verticaal (in de z-richting) loopt. En BR ligt in het verticale vlak $OBRP$. Dus maak je een aanzicht in de richting van BO. Je ziet dan dat de afstand tussen beide lijnen gelijk is aan de lengte van $\overrightarrow{SM}$ waarin M het snijpunt van SQ en RP is. De gevraagde afstand is dus $\left|\overrightarrow{SM}\right| = \sqrt{2}$.

Wil je de afstand tussen punt F en vlak $BCSR$ berekenen, dan kun het beste zo kijken dat je dit vlak als een lijn ziet. Je moet daarvoor een vooraanzicht maken, dus in de x-richting kijken. Je kunt dan de gevraagde afstand aangeven met een lijnstukje vanuit F en loodrecht op het vlak (dat je als een lijn ziet). De lengte van dit lijnstukje kun je dan met gelijkvormigheid berekenen.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1** en vooral de figuur.

a De afstand van punt P tot lijn BR kun je tekenen in een vlak waar beide in liggen. Maak een tekening waarin de afstand van P tot BR zichtbaar wordt en laat zien hoe je die afstand berekent.

b De lijnen BR en GS kruisen elkaar. Maak een tekening waarin hun onderlinge afstand zichtbaar wordt.

c Bereken de afstand van punt Q tot vlak $BCSR$.

Opgave 2

Een veelvlak $ABCD.EFGH$ heeft als hoekpunten $A(4,-3,0)$, $B(4,3,0)$, $C(-4,3,0)$, $D(-4,-3,0)$, $E(2,-1,4)$, $F(2,1,4)$, $G(-2,1,4)$ en $H(-2,-1,4)$.

a Bereken de afstand van punt F tot lijn AE. Rond af op twee decimalen.

b Bereken exact de afstand tussen de kruisende lijnen AE en CG.

c De lijn EH loopt evenwijdig met vlak $BCGF$. Hoe groot is in twee decimale nauwkeurig hun onderlinge afstand?

d Waarom heeft het geen zin om naar de onderlinge afstand van lijn AE en vlak $BCGF$ te vragen?

Uitleg 2

Hier zie je een constructie met staalkabels en vier stalen masten in een driedimensionaal cartesisch $Oxyz$-assenstelsel. Alle masten zijn evenwijdig aan de z-as en 5 m hoog. De constructie dient ter ondersteuning van een grote tent met een vierkant grondvlak van 10 m bij 10 m.

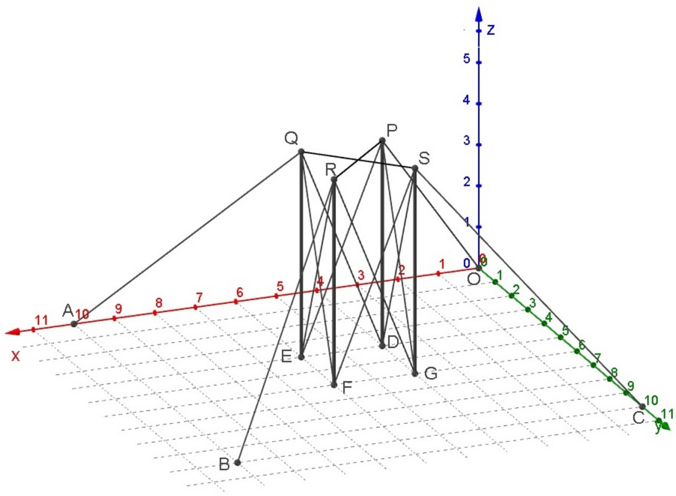
Punt P heeft de coördinaten (4,4,5), punt Q is (6,4,5).
In de figuur komen allerlei hoeken voor.

De lijnen BR en AQ maken een hoek φ met elkaar. Die hoek kun je berekenen vanuit de richtingsvectoren van beide lijnen.

$\overrightarrow{BR} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

De hoek bepaal je met het inproduct:
$\overrightarrow{BR} \cdot \overrightarrow{AQ} = -4 \cdot -4 + -4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 25$

En $25 = \sqrt{57} \cdot \sqrt{57} \cdot \cos(\varphi)$ geeft $\varphi \approx 64°$.
De hoek tussen de lijnen BR en AQ is ongeveer 64°.



Figuur 4 **Figuurapplet**

De hoek die lijn BR maakt met het grondvlak $OABC$ is de hoek tussen deze lijn en zijn loodrechte projectie op het vlak BF. Deze hoek bereken je vanuit de richtingsvectoren $\overrightarrow{BR}$ en $\overrightarrow{BF}$.

Onder de hoek tussen twee vlakken versta je de grootste hoek tussen een lijn in het éne vlak en een lijn in het andere vlak. In de praktijk neem je twee lijnen die loodrecht op de snijlijn van beide vlakken staan en bereken je daar de hoek tussen.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**.

a Waarom kun je de hoek tussen de lijnen BR en AQ ook berekenen zonder het inproduct te gebruiken?

b Bereken zonder het inproduct te gebruiken de hoek tussen BR en AQ.

GR en EP zijn twee kruisende lijnen. Maar ook die maken een hoek met elkaar.

c Leg uit waarom de hoek tussen GR en EP even groot is als de hoek tussen de lijnen GR en FS. Bereken daarmee de hoek φ tussen GR en EP.

Opgave 4

Bekijk **Uitleg 2** en vooral de figuur.

a Bereken de hoek die de lijnen BR en GS met elkaar maken in graden nauwkeurig.

b Bereken de hoek die lijn BR met het grondvlak $OABC$ maakt in graden nauwkeurig.

c Bereken de hoek tussen de vlakken $BCSR$ en $OAPQ$ in graden nauwkeurig.

Opgave 5

Een veelvlak $ABCD.EFGH$ heeft als hoekpunten $A(4,-3,0)$, $B(4,3,0)$, $C(-4,3,0)$, $D(-4,-3,0)$, $E(2,-1,4)$, $F(2,1,4)$, $G(-2,1,4)$ en $H(-2,-1,4)$.

a Bereken de hoek tussen de snijdende lijnen AE en BF in graden nauwkeurig.

b Bereken de hoek tussen de kruisende lijnen AE en CG in graden nauwkeurig.

c Bereken de hoek die lijn BF maakt met vlak $ABCD$ in graden nauwkeurig.

d Bereken de hoek die de vlakken $AEHD$ en $BCGF$ met elkaar maken in graden nauwkeurig.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Onder de **afstand** van twee meetkundige objecten versta je altijd hun kortste onderlinge afstand.

- De afstand van punt P tot punt Q is $|\overrightarrow{PQ}|$.
- De afstand van punt P tot lijn l is de lengte van het loodlijnstuk vanuit P op l.
- De afstand van punt P tot vlak V is de lengte van het loodlijnstuk vanuit P op V.
- De afstand tussen twee kruisende lijnen l en m is de lengte van het loodlijnstuk vanuit P op l tot het vlak door m en evenwijdig met l.
- De afstand tussen twee evenwijdige lijnen l en m is de lengte van het loodlijnstuk vanuit P op lijn l tot lijn m.
- De afstand tussen een lijn l en vlak V die evenwijdig zijn, is de lengte van het loodlijnstuk vanuit P op lijn l tot vlak V.
- De afstand tussen twee evenwijdige vlakken V en W is de lengte van het loodlijnstuk vanuit P op vlak V tot vlak W.

Een **hoek** tussen twee lijnen, een lijn en een vlak, of twee vlakken, is altijd scherp. Tenzij anders vermeld geef je een hoek in graden nauwkeurig.

- De hoek tussen twee lijnen bepaal je door de hoek tussen hun richtingsvectoren te berekenen.
- De hoek tussen een lijn l en een vlak V is de hoek tussen l en zijn loodrechte projectie l' op V.
- De hoek tussen twee vlakken V en W is gelijk aan de hoek tussen een lijn in V en een lijn in W die beide loodrecht op de snijlijn van V en W staan.

Voorbeeld 1

Dit is een schuin afgeknotte balk $OABC.DEFG$ met $E(5,0,6)$ en $G(0,5,5)$.
Het scheve bovenvlak $DEFG$ is geen rechthoek, de hoek bij hoekpunt D is kleiner dan 90°. Bereken de grootte van deze hoek.

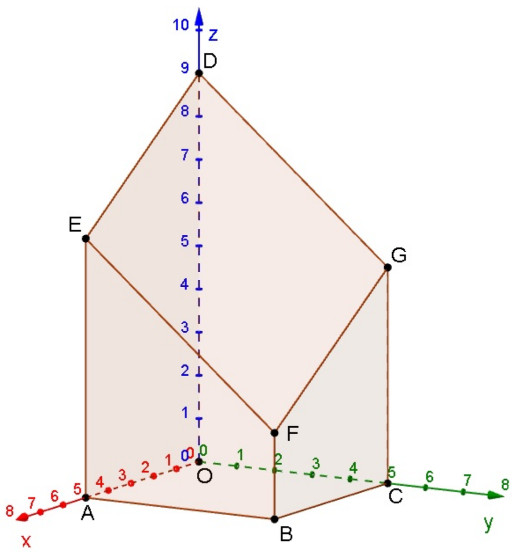
Antwoord

$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{DG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Voor het inproduct van beide vectoren geldt:

$12 = \sqrt{34} \cdot \sqrt{41} \cdot \cos(\angle EDG)$.

En dus is $\angle EDG \approx 71°$.



Figuur 5 Figuurapplet

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1**. Zie hoe je daar een hoek berekent.
De hoek in vlak $DEFG$ die bij E zit, kun je meteen afleiden uit $\angle EDG \approx 71°$.

a Bereken die hoek met behulp van de vectoren $\overrightarrow{ED}$ en $\overrightarrow{EF}$.

b Hoe groot is de hoek tussen de lijnen ED en EF?

c Waarom is de hoek tussen de vlakken $OAED$ en $OCGD$ geen 71°?

Opgave 7

Een regelmatige vierzijdige piramide heeft als hoekpunten $A(4,-4,0)$, $B(4,4,0)$, $C(-4,4,0)$, $D(-4,-4,0)$ en $T(0,0,6)$.

a Bereken de hoek tussen de lijnen AT en CT.

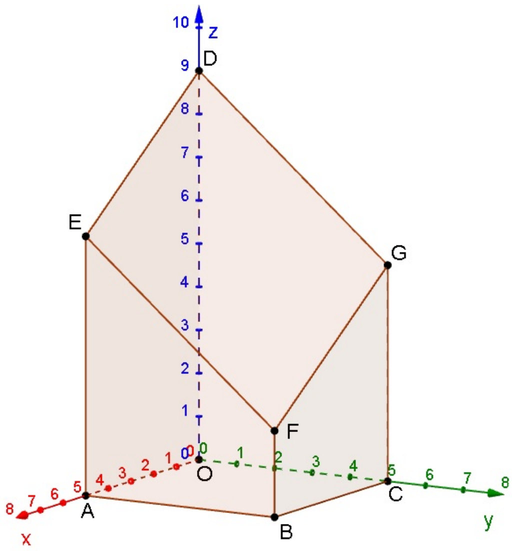
b Hoe groot is de hoek tussen de lijnen AT en TB?

c Hoe groot is de hoek tussen de lijnen AT en BC?

Voorbeeld 2

Dit is een schuin afgeknotte balk $OABC.DEFG$ met $E(5,0,6)$ en $G(0,5,5)$.

- Bepaal de afstand tussen de kruisende lijnen AB en DG.
- Bepaal de afstand tussen de evenwijdige lijnen EF en DG.
- Bepaal de afstand tussen punt O en vlak $ACGE$.



Figuur 6 Figuurapplet

Antwoord

Ga eerst na, dat F het punt $(5,5,2)$ moet zijn.

Om de afstand tussen de kruisende lijnen AB en DG te bepalen, maak je een vlak door bijvoorbeeld DG dat evenwijdig is met AB. Dat is het vlak $OCGD$ (het yz-vlak). In een zijaanzicht zie je dat de afstand van elk punt van AB tot dat vlak 5 is. Dat is dus ook de afstand tussen beide lijnen. Je kunt het kortste verbindingslijnstuk tekenen door AB te verlengen en DG te verlengen tot hij de y-as snijdt in P. Het lijnstuk door P, evenwijdig met CB tot het punt Q op lijn AB is dit kortste verbindingslijnstuk.

De afstand tussen de evenwijdige lijnen EF en DG is de lengte van het lijnstuk in het vlak $DEFG$ vanuit (bijvoorbeeld) punt E en loodrecht op DG.

$\angle EDR = 71{,}252...^\circ$ (zie vorige voorbeeld) en $|ED| = \sqrt{34}$.

$\sin(\angle EDR) = \frac{|ER|}{\sqrt{34}}$ geeft $|ER| \approx 5{,}5$.

De afstand tussen de evenwijdige lijnen EF en DG is ongeveer 5,5.

Het snijpunt van de diagonalen AC en OB is M.

Omdat de ribben AE en CG recht omhoog gaan is $|OM|$ de afstand tussen O en vlak $ACGE$.

$|OM| = \frac{1}{2}|OB| = \frac{1}{2}\sqrt{50} = 2{,}5\sqrt{2}$.

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 2**. Zie hoe je daar afstanden berekent.

a Waarom moet F het punt $(5,5,2)$ zijn?

b Bepaal de afstand tussen de kruisende lijnen AE en DG.

c Bereken de afstand tussen de kruisende lijnen OA en DG. Rond af op twee decimalen.

d Wat is exact de afstand van punt B tot het vlak $ACGE$?

Opgave 9

Een regelmatige vierzijdige piramide heeft als hoekpunten $A(4,-4,0)$, $B(4,4,0)$, $C(-4,4,0)$, $D(-4,-4,0)$ en $T(0,0,6)$. Rond de antwoorden in deze vraag af op twee decimalen.

a Bereken de afstand tussen de lijnen AT en DB.

b Bereken de afstand tussen de lijnen AT en BC.

c Bereken de afstand van punt B tot vlak ADT.

Voorbeeld 3

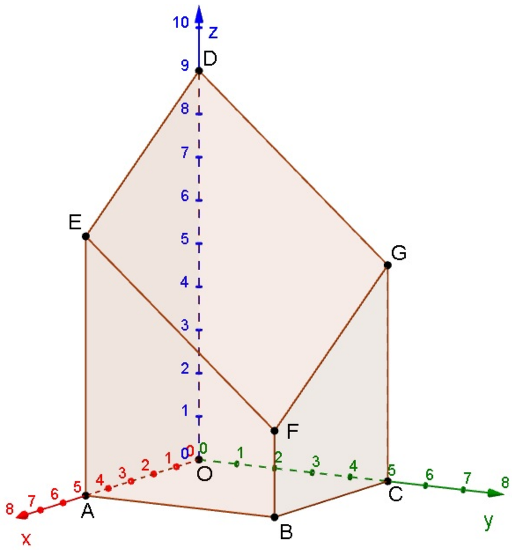
Dit is een schuin afgeknotte balk $OABC.DEFG$ met $E(5,0,6)$ en $G(0,5,5)$.
Bereken de hoek tussen de vlakken $OABC$ en $DEFG$.

Antwoord

Je moet dan eerst de snijlijn van beide vlakken tekenen:

- Verleng DG tot hij OC snijdt in K.
- Verleng DE tot hij OA snijdt in L.
- KL is de bedoelde snijlijn.

Teken vervolgens lijn OS loodrecht op KL.
Teken ook lijnstuk SD.
Beide lijnstukken staan loodrecht op de snijlijn KL van beide vlakken, dus de gevraagde hoek is $\angle OSD$. Deze is gelijk aan 45°.



Figuur 7 Figuurapplet

Opgave 10

Bekijk **Voorbeeld 3**. Er wordt beschreven hoe je de hoek tussen de vlakken $OABC$ en $DEFG$ kunt berekenen.

a Teken zelf de figuur en daarin de snijlijn van beide vlakken.

b Bereken de lengte van OS.

c Laat nu zien, dat de hoek tussen beide vlakken inderdaad 45° is.

Opgave 11

Een regelmatige vierzijdige piramide heeft als hoekpunten $A(4,-4,0)$, $B(4,4,0)$, $C(-4,4,0)$, $D(-4,-4,0)$ en $T(0,0,6)$.

a Bereken de hoek tussen de vlakken ADT en BCT.

De hoek tussen de vlakken ABT en BCT is niet meteen te berekenen. Je moet daartoe de lengtes berekenen van een lijnstuk AP dat loodrecht staat op BT en een lijnstuk CP dat ook loodrecht staat op BT. Je kunt je dan in ΔAPC de gewenste hoek berekenen.

b Voer die berekening uit.

Verwerken

Opgave 12

Welke beweringen zijn waar?

A. De afstand tussen twee kruisende lijnen is altijd 0.
B. De afstand tussen twee evenwijdige vlakken V en W is de lengte van het loodlijnstuk vanuit P op vlak V tot vlak W.
C. De hoek tussen twee lijnen kun je bepalen door de hoek tussen hun richtingsvectoren te berekenen.
D. De hoek tussen twee vlakken kun je niet bepalen.

Opgave 13

Gegeven is balk $OABC.DEFG$ in een cartesisch assenstelsel door $A(4{,}0{,}0)$, $B(4{,}4{,}0)$, $C(0{,}4{,}0)$ en $D(0{,}0{,}6)$.

a Hoe groot is de afstand tussen de lijnen AB en CG?

b Bereken exact afstand tussen de lijnen AG en EF.

c Bereken de hoek tussen de lijnen AG en EF.

d Bereken de hoek tussen de vlakken $OABC$ en $ABGD$.

Opgave 14

Gegeven is een kubus $ABCD.EFGH$ in een cartesisch assenstelsel door $A(4,-4,0)$, $B(4{,}4{,}0)$, $C(-4{,}4{,}0)$, $D(-4,-4,0)$ en $E(4,-4,8)$. Punt M ligt op AE zo, dat $|AM| = 2$. Punt N is het midden van FG.

a Bereken exact de afstand van punt M tot punt N.

b Hoe groot is de afstand van punt N tot lijn EH?

c Bereken exact de afstand van punt N tot lijn HD.

d Bereken exact de afstand van punt N tot vlak $ACGE$.

e Bereken in één decimaal nauwkeurig de afstand van lijn MN tot lijn DC.

f Bereken in één decimaal nauwkeurig de afstand van lijn MN tot lijn BF.

Opgave 15

Gegeven is een kubus $ABCD.EFGH$ in een cartesisch assenstelsel door $A(4,-4,0)$, $B(4{,}4{,}0)$, $C(-4{,}4{,}0)$, $D(-4,-4,0)$ en $E(4,-4,8)$. Punt S is het snijpunt van de lijnen EG en FH. Punt T is het snijpunt van de lijnen AG en EC.

a Bereken de hoek tussen de lijnen AF en AS.

b Bereken de hoek tussen de kruisende lijnen BC en AS.

c Hoe groot is de hoek die lijn TS met vlak $ABCD$ maakt?

d Bereken de hoek die lijn AS met vlak $ABCD$ maakt.

e Bereken de hoek die lichaamsdiagonaal EC met diagonaalvlak $DBFH$ maakt.

f Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de vlakken BCS en $ADHE$.

Opgave 16

Gegeven is een prisma $ABC.DEF$ in een cartesisch assenstelsel door $A(6{,}0{,}0)$, $B(0{,}4{,}0)$, $C(0,-4,0)$, $D(6{,}0{,}8)$, $E(0{,}4{,}8)$ en $F(0,-4,8)$. Punt Q is het midden van AD.

a Hoeveel bedraagt de afstand van lijn AD tot vlak $CBEF$?

b Bereken exact de afstand tussen de kruisende lijnen BQ en CF.

c Hoe groot is de hoek die BQ met CF maakt?

d Bereken de hoek die lijn BQ met vlak $CBEF$ maakt.

e P ligt op lijnstuk EF. De hoek die lijn PQ met het vlak ABC maakt kan variëren. Tussen welke waarden?

f Bereken de hoek tussen de vlakken QEF en ABC.

Opgave 17

Een afgeknotte balk $OABC.DEFG$ is in een cartesisch assenstelsel gegeven door $A(8{,}0{,}0)$, $B(8{,}8{,}0)$, $C(0{,}8{,}0)$, $E(8{,}0{,}10)$, $F(8{,}8{,}4)$ en $G(0{,}8{,}6)$.

a Bepaal de coördinaten van punt D.

b Geef de afmetingen en hoeken van het bovenvlak.

c Bereken de afstand van punt A tot lijn DG in één decimaal nauwkeurig.

d Bereken de afstand tussen de lijnen EF en OA.

e Bereken in één decimaal nauwkeurig de hoek tussen vlak $DEFG$ en het grondvlak $OABC$.

Toepassen

Opgave 18: Afgeknotte piramide

De afgeknotte piramide $OABC.DEFG$ is in een cartesisch assenstelsel gegeven door $A(4,0,0)$, $B(8,4,0)$, $C(4,8,0)$, $D(0,4,0)$, $E(3,1,6)$ en $H(0,4,6)$. M is het midden van BT en N is het midden van DT.

a Bepaal de coördinaten van de punten F en G.

b Bereken in graden nauwkeurig de hoek die de lijnen BF en DH met elkaar maken.

c Bereken de afstand tussen de lijnen BF en AC.

d Bereken de afstand van punt F tot vlak $ACGE$.

Testen

Opgave 19

Van een kubus $ABCD.EFGH$ met $A(4,-4,0)$, $B(4,4,0)$, $C(-4,4,0)$, $D(-4,-4,0)$ en $E(4,-4,8)$ is een punt afgezaagd. Het zaagvlak is driehoek PQR, waarbij P, Q en R de middens van respectievelijk EF, BF en FG zijn.

a Bereken de afstand van punt R tot lijn PQ.

b Bereken de afstand van punt P tot vlak HDB.

c Bereken de afstand van punt N tot lijn HD.

d Bereken de afstand tussen de lijnen AG en BQ.

e Bereken de hoek tussen de lijnen PQ en PR.

f Bereken de hoek tussen de vlakken PQR en $ABCD$.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.