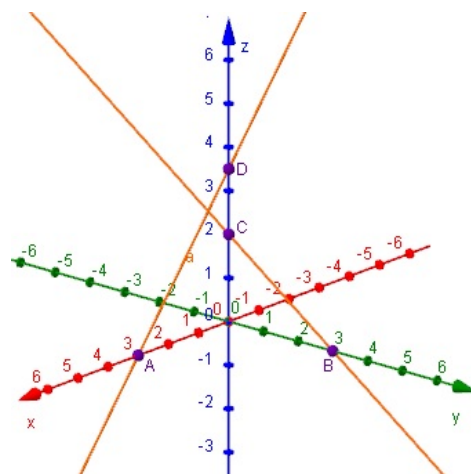


## 3.4 Punten, lijnen, vlakken

### Inleiding

Zijn dit twee snijdende lijnen? Of kruisen ze elkaar? En wat versta je ook alweer onder 'kruisende lijnen'? En hoe bepaal je hun kortste onderlinge afstand? En hoe kunnen vlakken ten opzichte van elkaar liggen?

Over dergelijke vragen gaat dit onderdeel...



Figuur 1 [Figuurapplet](#)

### Je leert in dit onderwerp

- bepalen of punten wel of niet op een lijn of in een vlak liggen;
- onderzoeken of lijnen elkaar snijden of kruisen, of evenwijdig zijn;
- onderzoeken of lijnen en/of vlakken elkaar snijden of niet.

### Voorkennis

- met vectoren rekenen in 3D, het inproduct van twee vectoren gebruiken;
- werken met aanzichten van ruimtelijke figuren.

### Verkennen

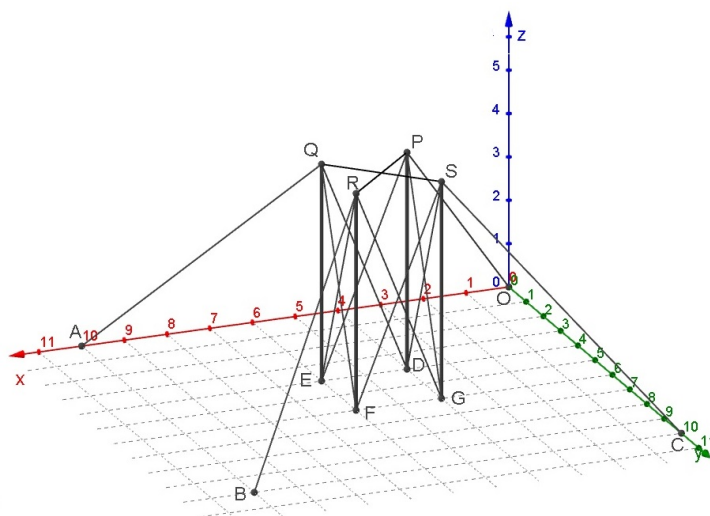
#### Opgave V1

Hier zie je een constructie met staalkabels en vier stalen masten in een driedimensionaal cartesisch  $Oxyz$ -assenstelsel. Alle masten zijn evenwijdig aan de  $z$ -as en 5 m hoog. De constructie dient ter ondersteuning van een grote tent met een vierkant grondvlak van 10 m bij 10 m.

Punt  $P$  heeft de coördinaten  $(4,4,5)$ ,  
punt  $Q$  is  $(6,4,5)$ .

In de figuur lijken allerlei kabels elkaar te snijden, maar dat is gezichtsbedrog.

- Snijden de kabels  $FS$  en  $GR$  elkaar? En waarom?
- Snijden de kabels  $EP$  en  $GR$  elkaar? En waarom?
- Snijden de lijnen  $AQ$  en  $CS$  elkaar? En waarom?
- Snijden de lijnen  $AQ$  en  $FS$  elkaar? En waarom?
- Hoe ver liggen de lijnen  $EP$  en  $GR$  van elkaar?



Figuur 2 [Figuurapplet](#)

## Uitleg 1

Hier zie je een constructie met staalkabels en vier stalen masten in een driedimensionaal cartesisch  $Oxyz$ -assenstelsel. Alle masten zijn evenwijdig aan de  $z$ -as en 5 m hoog. De constructie dient ter ondersteuning van een grote tent met een vierkant grondvlak van 10 m bij 10 m.

Punt  $P$  heeft de coördinaten  $(4,4,5)$ , punt  $Q$  is  $(6,4,5)$ .

In de figuur lijken allerlei kabels elkaar te snijden, maar dat is gezichtsbedrog, draai de figuur maar.

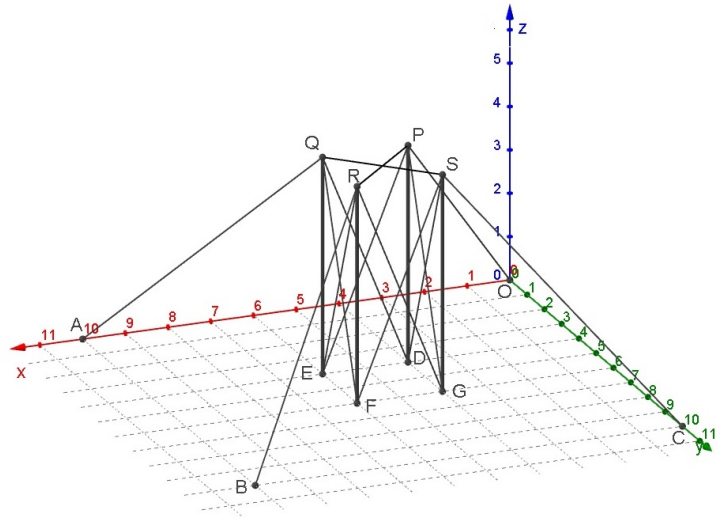
Zo liggen de kabels (en dus de lijnen)  $FS$  en  $GR$  in hetzelfde vlak  $FGSR$ . Lijnen die in hetzelfde vlak liggen lopen evenwijdig of snijden elkaar. Evenwijdig zijn ze niet en dus snijden ze elkaar. Maar de lijnen  $FS$  en  $DQ$  liggen niet in hetzelfde vlak. Deze lijnen zijn niet evenwijdig, maar ze snijden elkaar ook niet. Het zijn kruisende lijnen.

Aanzichten helpen bij het beoordelen van de onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken. Bijvoorbeeld zie je in een bovenaanzicht dat punt  $D$  in het vlak  $BOPR$  ligt. En zie je in een vooraanzicht dat de lijnen  $AQ$  en  $OP$  elkaar snijden.

Soms kun je met coördinaten redeneren. Bijvoorbeeld de lijnen  $EP$  en  $DS$  lijken wel evenwijdig. Gelukkig weet je van al deze punten de coördinaten:  $E(6,4,0)$ ,  $P(4,4,5)$ ,  $D(4,4,0)$  en  $S(4,6,5)$ . Dus zijn de richtingsvectoren van beide lijnen:

$$\overrightarrow{EP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Deze vectoren hebben niet dezelfde richting en dus zijn deze lijnen niet evenwijdig.



Figuur 3 Figuurapplet

### Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1** en vooral de figuur.

- De lijnen  $BR$  en  $FQ$  lijken een snijpunt te hebben. Waarom is dat toch niet het geval? Hoe noem je hun onderlinge ligging?
- Waarom liggen de punten  $E$  en  $G$  in vlak  $ACSQ$ ?
- De lijnen  $BR$  en  $FS$  lijken evenwijdig. Is dat ook zo? Licht je antwoord toe met vectoren.

### Opgave 2

Bekijk **Uitleg 1**.

- Toon met behulp van het bovenaanzicht aan dat inderdaad punt  $D$  in vlak  $BOPR$  ligt.
- Waarom kun je zeggen dat de lijnen  $AQ$  en  $OP$  elkaar snijden?
- Bepaal met behulp van het boven- en zijaanzicht de coördinaten van het snijpunt van de lijnen  $AQ$  en  $OP$ .

## Uitleg 2

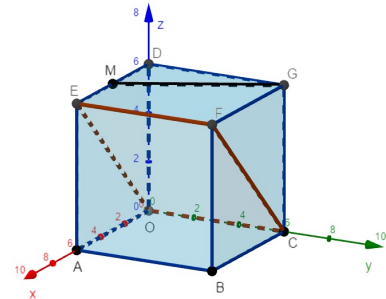
Bekijk kubus  $OABC.DEFG$ . Punt  $M$  ligt op het midden van ribbe  $DE$ . Verder is vlak  $OCFE$  getekend.

Een vlak is in alle richtingen onbegrensd. Net zoals een lijn geen begin en eind heeft.

Het is dus zinvol om te vragen naar de onderlinge ligging van vlak  $OCFE$  en lijn  $GM$ .

Merk op dat de lijnstukken  $DE$  en  $GM$  in hetzelfde vlak liggen ( $DEFG$ ). De lijnstukken zijn niet evenwijdig, dit betekent dat de lijnen  $DE$  en  $GM$  elkaar snijden. En daarom snijdt lijn  $GM$  vlak  $OCFE$ .

Omdat lijn  $GM$  vlak  $OCFE$  snijdt, snijden de vlakken  $DMG$  en  $OCFE$  elkaar. Merk ook op dat vlak  $DMG$  hetzelfde is als vlak  $DEFG$ .



Figuur 4 **Figuurapplet**

### Opgave 3

Bekijk de kubus uit **Uitleg 2**.

- Bepaal de onderlinge ligging van lijn  $DG$  en vlak  $OCEF$ .
- Bepaal de onderlinge ligging van lijn  $GM$  en vlak  $ABFE$ .

### Opgave 4

Bekijk de kubus uit **Uitleg 2**.

- Bepaal de onderlinge ligging van de vlakken  $DGM$  en  $ABFE$ .
- Punt  $P$  is het midden van lijnstuk  $OD$ . Bepaal de onderlinge ligging van de vlakken  $PDM$  en  $ACGE$ .

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Een **punt** is een positie in de ruimte zonder afmetingen. Een punt kan op een lijn of in een vlak liggen.

Een **lijn** wordt bepaald door twee punten, door twee punten gaat precies één lijn die naar beide kanten onbegrensd is.

- Twee lijnen met dezelfde richting(svector) zijn evenwijdig.
- Twee lijnen met dezelfde richting(svector) en een gemeenschappelijk punt vallen samen.
- Twee lijnen die niet dezelfde richting(svector) hebben snijden elkaar als ze in hetzelfde vlak liggen.
- Twee lijnen die niet dezelfde richting(svector) hebben **kruisen** elkaar als ze niet in hetzelfde vlak liggen.

Een **vlak** wordt bepaald door drie punten die niet op één lijn liggen, door drie van die punten gaat precies één vlak dat naar alle kanten onbegrensd is. Een vlak kan ook bepaald worden door:

- een lijn met een punt dat daar niet op ligt;
- twee snijdende lijnen;
- twee evenwijdige lijnen.

De **onderlinge ligging** van lijnen en vlakken:

- Een lijn  $l$  is evenwijdig met een vlak  $V$  als hij in een ander vlak ligt dat evenwijdig is met  $V$ .
- Een lijn  $l$  snijdt een vlak  $V$  als hij in een ander vlak ligt dat niet evenwijdig is met  $V$ .
- Een lijn  $l$  ligt in een vlak  $V$  als twee punten van de lijn in  $V$  liggen.
- Twee vlakken zijn evenwijdig als ze geen gemeenschappelijke punten hebben. Dat is bijvoorbeeld zo als twee snijdende lijnen in het éne vlak evenwijdig zijn aan twee snijdende lijnen in het andere vlak.
- Twee vlakken snijden elkaar als ze één of meer gemeenschappelijke punten hebben. Ze hebben dan een snijlijn.

### Voorbeeld 1

Van de kubus  $OABC.DEFG$  is  $M$  het midden van  $AE$  en  $N$  het midden van  $AB$ .

Bepaal de onderlinge ligging van de lijnen:

- $DF$  en  $MB$
- $MC$  en  $DN$
- $BG$  en  $DN$

Antwoord

Voor de onderlinge ligging van  $DF$  en  $MB$  kun je zo redeneren:

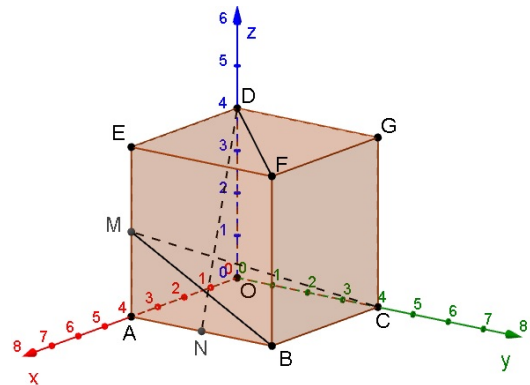
- $DF$  en  $MB$  zijn niet evenwijdig, vergelijk eventueel hun richtingsvectoren.
- $MB$  en punt  $F$  liggen in het voorvlak.
- Punt  $D$  ligt niet in het voorvlak.
- $DF$  en  $MB$  liggen dus niet in één vlak en kunnen elkaar daarom niet snijden.
- $DF$  en  $MB$  zijn kruisende lijnen.

Voor de onderlinge ligging van  $CM$  en  $DN$  kun je zo redeneren:

- $CM$  en  $DN$  zijn niet evenwijdig, vergelijk eventueel hun richtingsvectoren.
- $CM$  en punt  $H$  liggen in het vlak  $HMC$ .
- Ligt punt  $N$  ook in dat vlak?
- $MN$  en  $CD$  zijn evenwijdig (richtingsvectoren) en vormen dus vlak  $MNCH$ .
- $CM$  en  $DN$  liggen in vlak  $MNCH$  en zijn dus evenwijdig.

Voor de onderlinge ligging van  $BG$  en  $DN$  kun je zo redeneren:

- Beide lijnen liggen in vlak  $ABGD$ .
- De lijnen zijn niet evenwijdig, dus snijden ze elkaar.



Figuur 5 Figuurapplet

### Opgave 5

In **Voorbeeld 1** wordt beredeneerd dat de lijnen  $BG$  en  $DN$  elkaar snijden.

- Welke  $y$ -coördinaat heeft het snijpunt?
- Bekijk een bovenaanzicht (met de applet of teken het zelf) en bepaal zo de  $x$ -coördinaat van het snijpunt.
- Bekijk het vooraanzicht en bepaal zo de  $z$ -coördinaat van het snijpunt.

### Opgave 6

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de onderlinge ligging van lijnen kunt beredeneren. Gegeven is de kubus  $OABC.DEFH$  met  $A(6,0,0)$ ,  $C(0,6,0)$  en  $D(0,0,6)$ .  $M$  is het midden van  $AE$ . Op de ribben van deze kubus liggen  $P(6,2,0)$ ,  $Q(6,5,0)$  en  $R(0,2,6)$ .

Beredeneer de onderlinge ligging van de lijnen:

- a  $EF$  en  $OD$
- b  $PR$  en  $QG$
- c  $PR$  en  $CM$
- d  $QR$  en  $CM$
- e  $PR$  en  $BG$
- f  $PQ$  en  $AB$

### Opgave 7

Het prisma  $ABC.DEF$  is gegeven door  $A(0, -3, 0)$ ,  $B(4, 0, 0)$ ,  $C(0, 3, 0)$  en  $D(0, -3, 4)$ . Verder is  $M$  het midden van  $AB$  en  $N$  het midden van  $BC$ .

- a Beredeneer dat de zijvlaksdiaalonen  $AE$  en  $BF$  elkaar kruisen.
- b Beredeneer dat de lijnen  $DM$  en  $FN$  elkaar snijden. Welke coördinaten heeft hun snijpunt  $S$ ?
- c Welke hoek maken de lijnen  $DM$  en  $FN$  met elkaar?

### Voorbeeld 2

Van de kubus  $OABC.DEFG$  is  $M$  het midden van  $AE$  en  $N$  het midden van  $BF$ .

- Bepaal de onderlinge ligging van de lijn  $DF$  en het vlak  $OMNC$ .
- Bepaal ook de onderlinge ligging van de lijn  $DG$  en het vlak  $OMNC$ .

Antwoord

Voor de onderlinge ligging van  $DF$  en vlak  $OMNC$  kun je zo redeneren:

- $D$  en  $F$  liggen niet in vlak  $OMNC$ .
- $DF$  ligt in vlak  $OBFD$ .
- Lijn  $ON$  ligt in vlak  $OMNC$  en in vlak  $OBFD$ .
- $DF$  en  $ON$  liggen dus in één vlak en hebben een snijpunt.
- $DF$  en vlak  $OMNC$  snijden elkaar.

Voor de onderlinge ligging van  $DG$  en vlak  $OMNC$  kun je zo redeneren:

- $D$  en  $G$  liggen niet in vlak  $OMNC$ .
- $DG$  ligt in vlak  $OCGD$ .
- Lijn  $OC$  ligt in vlak  $OMNC$  en in vlak  $OCGD$ .
- $DG$  en  $OC$  zijn evenwijdig.
- $DG$  en vlak  $OMNC$  zijn evenwijdig.

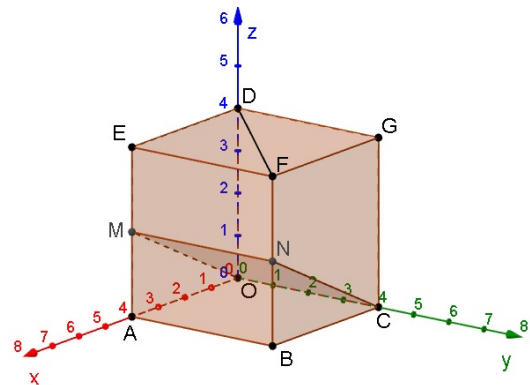
### Opgave 8

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je de onderlinge ligging van een lijn en een vlak kunt beredeneren. Gegeven is de kubus  $OABC.DEFG$  met  $A(6,0,0)$ ,  $C(0,6,0)$  en  $D(0,0,6)$ .

Beredeneer de onderlinge ligging van:

- a Vlak  $AGE$  en lijn  $DC$ .
- b Vlak  $AGE$  en lijn  $DB$ .
- c Vlak  $ACD$  en lijn  $EG$ .
- d Vlak  $ACD$  en lijn  $BF$ .

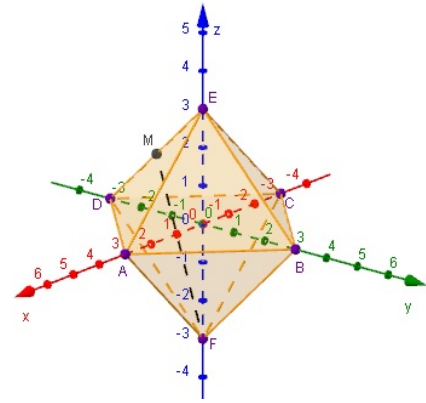
### Opgave 9



Figuur 6 **Figuurapplet**

Dit is een regelmatig achthoekig vlak (octaëder) met  $A(3,0,0)$ ,  $B(0,3,0)$ ,  $E(0,0,3)$  en  $F(0,0,-3)$ .  $M$  is het midden van  $ED$ .

- Beredeneer dat lijn  $AE$  evenwijdig is met het vlak  $FBC$ .
- Beredeneer dat  $FM$  het vlak  $BCE$  snijdt en bepaal hun snijpunt  $S$ .



Figuur 7 Figuurapplet

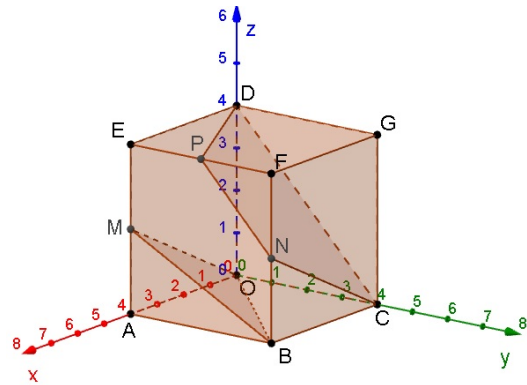
### Voorbeeld 3

Van de kubus  $OABC.DEFG$  is  $M$  het midden van  $AE$ ,  $N$  het midden van  $BF$  en  $P$  het midden van  $EF$ . Bepaal de onderlinge ligging van de vlakken  $OMB$  en  $DPNC$ .

Antwoord

Voor de onderlinge ligging van de vlakken  $OMB$  en  $DPNC$  kun je zo redeneren:

- Als je ook maar één punt kunt vinden dat in beide vlakken ligt, snijden ze elkaar.
- $PN$  en  $MB$  liggen beide in vlak  $ABFE$ .
- $PN$  en  $MB$  zijn niet evenwijdig (richtingsvectoren) en snijden elkaar in vlak  $ABFE$ .
- Dit snijpunt ligt in beide vlakken.
- De vlakken  $OMB$  en  $DPNC$  snijden elkaar.



Figuur 8 Figuurapplet

### Opgave 10

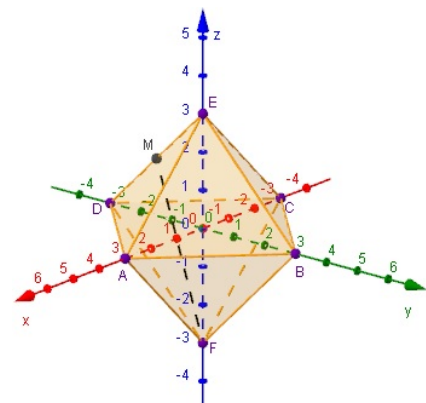
In **Voorbeeld 3** zie je hoe je de onderlinge ligging van vlakken kunt beredeneren. Gegeven is de kubus  $OABC.DEFG$  met  $A(6,0,0)$ ,  $C(0,6,0)$  en  $D(0,0,6)$ .  $M$  is het midden van  $AE$  en  $N$  dat van  $CG$ . Beredeneer de onderlinge ligging van de vlakken:

- $OMB$  en  $CFD$
- $OMB$  en  $NFD$

### Opgave 11

Dit is een regelmatig achthoekig vlak (octaëder) met  $A(3,0,0)$ ,  $B(0,3,0)$ ,  $E(0,0,3)$  en  $F(0,0,-3)$ .  $M$  is het midden van  $ED$ .

- Beredeneer dat de vlakken  $DAF$  en  $BCE$  evenwijdig zijn.
- Beredeneer dat de vlakken  $DAF$  en  $BCM$  niet evenwijdig zijn.



Figuur 9 Figuurapplet

## Verwerken

### Opgave 12

Welke beweringen zijn waar?

- A. Als twee lijnen in eenzelfde vlak liggen, dan snijden ze elkaar.
- B. Een vlak wordt bepaald door drie punten, die niet op één lijn liggen.
- C. Twee lijnen die niet dezelfde richtingsvector hebben snijden elkaar.
- D. Twee vlakken die geen gemeenschappelijke punten hebben, zijn evenwijdig.

### Opgave 13

Gegeven is kubus  $OABC.DEFG$ . Punt  $M$  ligt op het midden van ribbe  $FG$ .

Bepaal de onderlinge ligging van de lijnen  $AM$  en  $EF$ .

### Opgave 14

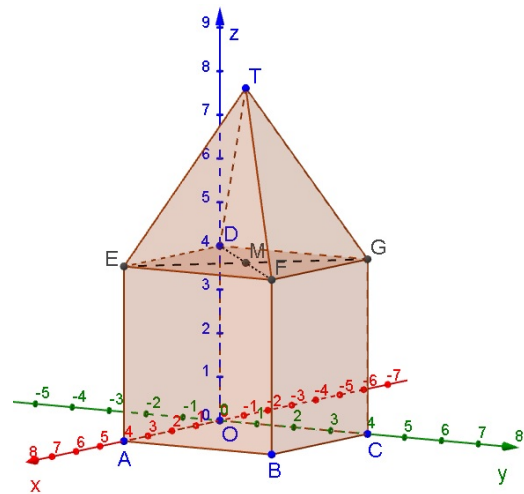
Gegeven is een piramide  $T.ABCD$  in een cartesisch assenstelsel door  $A(4, -4, 0)$ ,  $B(4, 4, 0)$ ,  $C(-4, 4, 0)$ ,  $D(-4, -4, 0)$  en  $T(0, 0, 12)$ . Punt  $M$  is het midden van  $BT$  en punt  $N$  is het midden van  $CT$ .

- a Is  $AMND$  een vierhoek, dus een vlakke figuur? Licht je antwoord toe.
- b Hebben de lijnen  $AM$  en  $OT$  een snijpunt? Licht je antwoord toe.
- c Beredeneer de coördinaten van het snijpunt  $S$  van  $AM$  en  $DN$ .
- d Bereken in één decimaal de hoek waaronder  $AM$  en  $DN$  elkaar snijden in graden nauwkeurig.

### Opgave 15

Hier zie je een regelmatige vierzijdige piramide boven op een kubus. De piramide is even hoog als de kubus.

- a Beredeneer dat de lijnen  $BF$  en  $ET$  elkaar kruisen.
- b Beredeneer dat de lijnen  $AG$  en  $ET$  elkaar snijden. Bepaal ook hun snijpunt.
- c Beredeneer de onderlinge ligging van lijn  $BF$  en vlak  $DGT$ . Als ze elkaar snijden, bepaal dan hun snijpunt.
- d Beredeneer de onderlinge ligging van lijn  $BM$  en vlak  $EFT$ . Als ze elkaar snijden, bepaal dan hun snijpunt.



Figuur 10 [Figuurapplet](#)

### Opgave 16

Een veelvlak  $ABCD.EFGH$  heeft als hoekpunten  $A(4, -3, 0)$ ,  $B(4, 3, 0)$ ,  $C(-4, 3, 0)$ ,  $D(-4, -3, 0)$ ,  $E(2, -1, 4)$ ,  $F(2, 1, 4)$ ,  $G(-2, 1, 4)$  en  $H(-2, -1, 4)$ .

- a Is dit veelvlak een afgeknotte piramide? Licht het antwoord toe.
- b De lijnen  $AE$  en  $BF$  snijden elkaar. Waarom weet je dat zeker? Bepaal met behulp van aanzichten hun snijpunt  $S$ .

### Opgave 17

Kubus  $OABC.DEFG$  is in een cartesisch assenstelsel gegeven door  $A(4, 0, 0)$ ,  $C(0, 4, 0)$  en  $D(0, 0, 4)$ .  $K$  is het midden van  $AE$  en  $L$  dat van  $CG$ . Punt  $M$  ligt op het verlengde van ribbe  $FG$  zo, dat  $|FG| = |GM|$ . Punt  $N$  ligt op het verlengde van ribbe  $OC$  zo, dat  $|OC| = |CN|$ .

- a Laat zien, dat  $BLDK$  een vlakke vierhoek is.
- b Beredeneer dat de lijn  $MN$  in het vlak  $BLDK$  ligt.

## Toepassen

### Opgave 18: Regelmatig driezijdig prisma

Van het regelmatige driezijdige prisma  $ABC.DEF$  zijn het voorvlak en het achtervlak gelijkzijdige driehoeken. Gegeven is  $A(4, -3, 0)$ ,  $B(4, 3, 0)$ ,  $D(-4, 3, 0)$  en  $E(-4, -3, 0)$ . Verder is  $M$  het midden van  $EF$  en  $N$  het midden van  $DF$ .

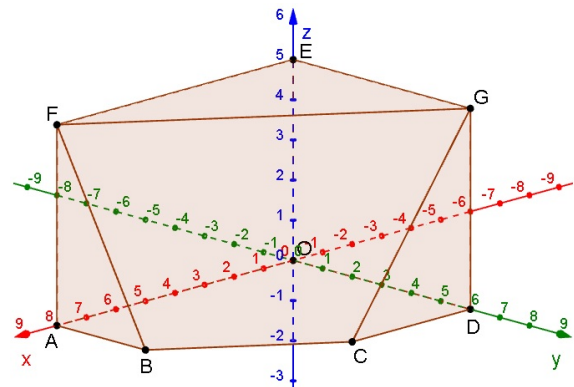
- Bepaal de coördinaten van de punten  $C$  en  $F$ .
- Beredeneer dat de lijnen  $AM$  en  $BN$  elkaar snijden. Bereken ook exact het snijpunt  $S$ .
- Beredeneer de onderlinge ligging van de lijnen  $BM$  en  $CN$ .

## Testen

### Opgave 19

In een cartesisch assenstelsel is  $OABCD.EFG$  een afgeknotte balk met  $A(8, 0, 0)$ ,  $B(8, 3, 0)$ ,  $C(4, 6, 0)$ ,  $D(0, 6, 0)$ ,  $E(0, 0, 5)$ ,  $F(8, 0, 5)$  en  $G(0, 6, 5)$ .

- Toon aan dat  $BCGF$  een (vlakke) vierhoek is.
- Beredeneer de onderlinge ligging van de lijnen  $FG$  en  $OE$ .
- Beredeneer de onderlinge ligging van lijn  $AD$  en vlak  $BCGF$ .
- $M$  is het midden van lijnstuk  $FG$ . Beredeneer dat  $BM$  en  $EA$  elkaar kruisen.

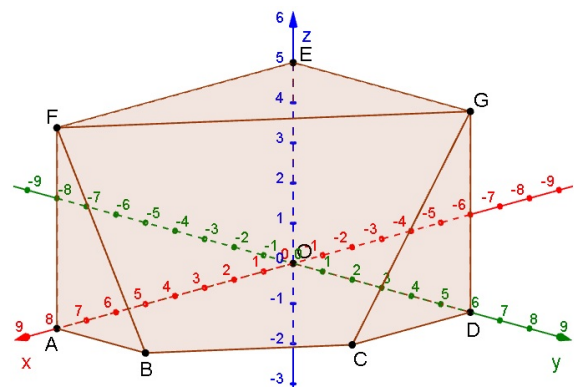


Figuur 11 [Figuurapplet](#)

### Opgave 20

In een cartesisch assenstelsel is  $OABCD.EFG$  een afgeknotte balk met  $A(8, 0, 0)$ ,  $B(8, 3, 0)$ ,  $C(4, 6, 0)$ ,  $D(0, 6, 0)$ ,  $E(0, 0, 5)$ ,  $F(8, 0, 5)$  en  $G(0, 6, 5)$ .

- Beredeneer dat  $FB$  en  $GC$  elkaar snijden en bepaal hun snijpunt.
- Welke hoek maken  $FB$  en  $GC$  met elkaar?




Figuur 12 [Figuurapplet](#)





© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: [f.spijkers@math4all.nl](mailto:f.spijkers@math4all.nl)

Met de Math4All Foliostaat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij [a.f.otten@math4all.nl](mailto:a.f.otten@math4all.nl) een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.

---

