2.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Oppervlakte en inhoud**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

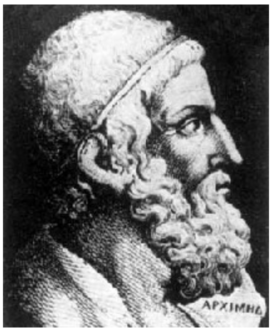
Begrippenlijst

- oppervlakte van een vlakke figuur — oppervlakteformules van rechthoek, driehoek, parallellogram, trapezium, cirkel
- oppervlakte van een lichaam — oppervlakteformule van een bol
- inhoud van een lichaam — inhoudsformules van prisma, cilinder, piramide, kegel, bol
- schaalvergroting — lengte-, oppervlakte- en inhoudsvergrotingsfactor

Activiteitenlijst

- de oppervlakte van de meeste vlakke figuren berekenen m.b.v. de oppervlakteformules
- de oppervlakte van veel lichamen berekenen
- de inhoud van veel lichamen berekenen
- verband tussen lengte-, oppervlakte- en inhoudsvergrotingsfactor toepassen

Achtergronden



Figuur 1

Al in de vroege Oudheid hield men zich bezig met het berekenen van oppervlakte en inhoud. Veel berekeningsmethoden waren al aan de Babyloniërs en de Oude Egyptenaren bekend en zijn ook op kleitabletten en in hiëroglyfen beschreven. Een belangrijk probleem was de **kwadratuur van de cirkel**: de vraag of het mogelijk is om een vierkant te construeren met dezelfde oppervlakte als een gegeven cirkel.
Als dit mogelijk zou zijn, was ook de oppervlakte van de cirkel als een exacte breuk te schrijven. Benaderingsmethoden voor die oppervlakte kende men al wel, een heel bekende is de **uitputtingsmethode van Eudoxus**.

De afgebeelde Griekse wetenschapper **Archimedes (287—212 v.Chr.)** hield zich veel met berekening van oppervlakte en inhoud bezig. Bijvoorbeeld in zijn boek: 'Over de bol en de cilinder.'.
In het eerste gedeelte laat Archimedes zien dat de oppervlakte van een bol vier keer de omtrek van een grootcirkel op die bol is, bepaalt hij de oppervlakte van een bolsegment en laat hij zien dat de inhoud van een bol $\frac{2}{3}$ is van de inhoud van de omhullende cilinder.

In het tweede gedeelte wordt getoond hoe een bol door een plat vlak in twee delen met een vooraf gegeven verhouding kan worden verdeeld. Bij deze berekeningen gebruikte Archimedes de uitputtingsmethode van Eudoxus.

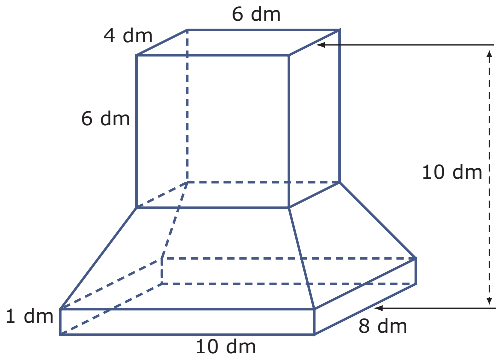
Testen

Opgave 1

Je ziet een stalen afzuigkap. Het bovenste deel is een balk, het onderste gedeelte ook. De vier schuine vlakken hebben allemaal de vorm van een symmetrisch trapezium.

a Bereken exact de totale oppervlakte van deze afzuigkap.

b Bereken de inhoud van deze afzuigkap. Merk op dat het middenstuk geen afgeknotte piramide is.



Figuur 2

Opgave 2

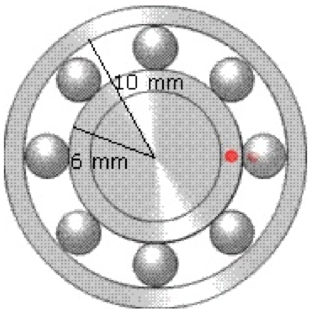
Een regelmatige vierzijdige piramide van hout wordt evenwijdig aan het grondvlak doorgezaagd. De oorspronkelijke hoogte van de piramide was 12 cm, het afgezaagde topje (ook een piramide) heeft een hoogte van 8 cm. Je hebt nu twee nieuwe ruimtelijke objecten: het afgezaagde topje en de onderkant (een afgeknotte piramide).

Hoe verhouden zich hun gewichten?

Opgave 3

Je ziet een doorsnede van een kogellager. In je fiets zitten om de as van elk wiel dergelijke kogellagers om ervoor te zorgen dat de draaibeweging van elk wiel met weinig wrijving kan worden uitgevoerd. De kogeltjes van dit lager zijn zuivere bollen en hebben een diameter van 4 mm. De kogeltjes zitten in een cilindervormige ring met een buitenstraal van 10 mm en een binnenstraal van 6 mm. De hoogte van die ring is gelijk aan de diameter van elk kogeltje. De ruimte tussen de kogeltjes is opgevuld met vet.

Hoeveel procent van de inhoud van de ring waarbinnen de kogeltjes zitten, bestaat uit vet? Geef een exact antwoord.



Figuur 3

Opgave 4

Een plastic koffiebekertje heeft (ongeveer) de vorm van een afgeknotte kegel. Van een bepaald koffiebekertje is de diameter van de bodem 46 mm, die van de bovencirkel 64 mm en de hoogte 90 mm.

a Bereken de inhoud van dit koffiebekertje in cL.

b Bereken de oppervlakte aan plastic in mm^2.

Een fabrikant heeft nog een hoeveelheid aan plastic waarmee 1000 van deze koffiebekertjes gemaakt kunnen worden. De klant wil alleen grotere koffiebekers hebben, waar twee keer zo veel koffie in kan. Zo'n grote koffiebeker moet een vergroting zijn van het kleinere koffiebekertje, alleen de dikte van het plastic blijft hetzelfde.

c Hoeveel van dit soort grote koffiebekers kan de fabrikant maken?

Opgave 5

In een cilindervormige koker passen precies drie tennisballen boven elkaar. Hoeveel procent van de inhoud van de koker bestaat uit lucht (de lucht in de tennisballen niet meegerekend)?

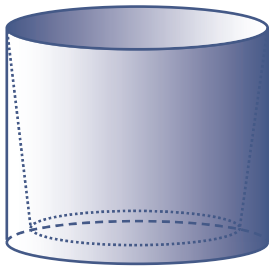
Figuur 4

Opgave 6

Een warenhuis heeft een nieuwe plastic vaas op de markt gebracht. Je ziet een afbeelding. Hij bestaat uit een massieve cilinder met een diameter van 40 cm en een hoogte van 41 cm waaruit een afgeknotte kegel is weggeboord. De bodem van deze afgeknotte kegel is 1 cm dik en de diameter van de grondcirkel van de afgeknotte kegel is 30 cm. De vaas is behoorlijk zwaar hoewel de soortelijke massa van het plastic maar 0,5 gram/cm^3 is.

a Bereken de hoeveelheid plastic van de vaas in cm^3.

b Bereken het gewicht van de vaas in grammen.



Figuur 5

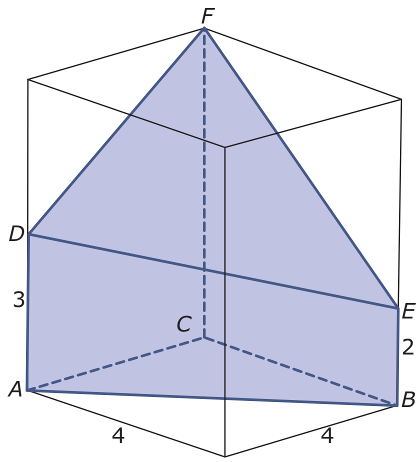
Opgave 7

Het lichaam $ABC.DEF$ past in een balk van 4 bij 4 bij 6 dm. Punt D ligt op 3 dm hoogte en punt E op 2 dm hoogte.

a Bereken exact de inhoud van het lichaam $ABC.DEF$.

b Teken een uitslag van het lichaam $ABC.DEF$.

In het punt F bevindt zich een draaibare ring. Door deze ring wordt een stang gestoken. Deze stang rust op ribbe DE en wordt doorgeschoven totdat het uiteinde de grond raakt. Bij verschillende standen van de stang horen verschillende contactpunten met de grond.

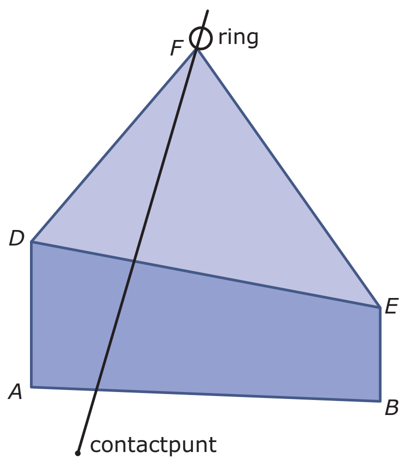


Figuur 6

c Teken in de uitslag het lijnstuk dat wordt gevormd door alle mogelijke contactpunten.

d Punt P is het contactpunt dat het dichtst bij F ligt. Onderzoek door berekening of een stang met een lengte van 75 cm lang genoeg is om F en P te verbinden.

(naar: examen havo wiskunde B in 1990, tweede tijdvak)



Figuur 7

Toepassen

Opgave 8: De Meeh-coëfficiënt

De Duitse bioloog Carl Meeh legde een verband tussen het lichaamsgewicht en de huidoppervlakte bij dieren. Meeh kwam voor het verband tussen lichaamsgewicht G (in kg) en de huidoppervlakte H (in dm^2) van dieren van een bepaalde soort tot een formule van de vorm:

$$H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$$

De constante c heet de Meeh-coëfficiënt. Die Meeh-coëfficiënt verschilt per diersoort. In de tabel zie je een aantal van die Meeh-coëfficiënten.

Meeh-coëfficiënten	
egel	7,5
schaap	8,4
muis	9,0
varken	9,0
koe	9,0
rat	9,1
marmot	9,3
konijn	9,8
vis	10,0
kat	10,0
paard	10,0
mens	11,2
slang	12,5
vleermuis	57,5

Tabel 1

Je kunt zelf vergelijkbare formules opstellen voor de buitenoppervlakte en het gewicht van een massieve kubus en een bol...
Neem bijvoorbeeld een massieve kubus, een massieve bol en een massieve cilinder. Alle drie zijn ze gemaakt van materiaal dat 1,5 gram/cm^3 weegt. Het gewicht noem je G en de buitenoppervlakte H.

a Bereken G en H van een kubus met ribben van r cm.
Stel een formule op voor H uitgedrukt in G.

b Bereken G en H van een bol met een straal van r cm.
Stel een formule op voor H uitgedrukt in G.

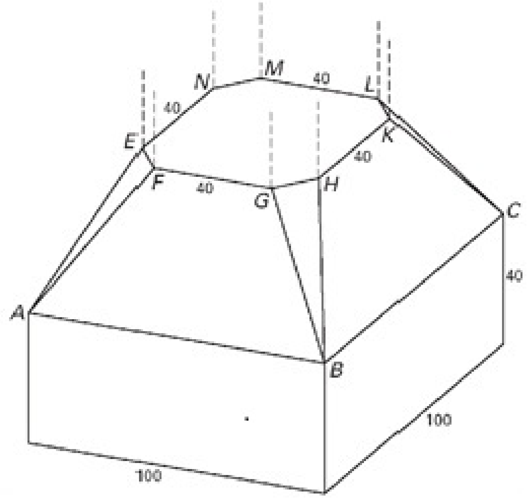
c Bereken G en H van een cilinder met een straal van r cm en een hoogte van r cm.
Stel een formule op voor H uitgedrukt in G.

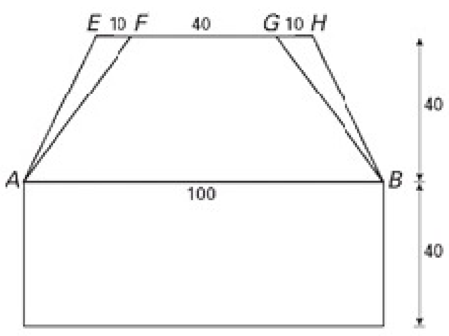
d Welke Meeh-coëfficiënten hebben deze kubus, deze bol en deze cilinder?

Examen

Opgave 9: Voetstuk

Een pijler onder een brug rust op een betonnen voetstuk. Het voetstuk staat op de grond en bestaat uit twee delen. Het onderste deel heeft de vorm van een balk, het bovenste deel $ABCD.EFGHKLMN$ zorgt voor de overgang naar de pijler die achtzijdig is. Zie de linker figuur. De rechter figuur is een vooraanzicht van het voetstuk. In beide figuren zijn de afmetingen gegeven in centimeters.





Figuur 8

a Met behulp van dit vooraanzicht kan de hoek berekend worden die het schuine vlak $BCKH$ met het vlak $ABCD$ maakt. Bereken die hoek. Rond je antwoord af op gehele graden.

b Teken een bovenaanzicht van dit voetstuk op schaal 1 : 10. Zet de letters erbij.

Er wordt een lint evenwijdig aan vlak $ABCD$ om het voetstuk gespannen. Het lint is 500 cm lang. Als het lint om het balkgedeelte wordt gespannen, is er 100 cm over. Gaat het lint door de punten E, F, G, H, K, L, M en N, dan is er ongeveer 283 cm over.

c Toon met een berekening aan dat er dan inderdaad ongeveer 283 cm over is.

d Het lint wordt nu op een hoogte van 50 cm (gerekend vanaf de grond) om het voetstuk gespannen. Bereken hoeveel cm van het lint op deze hoogte over is. Rond je antwoord af op een geheel getal.

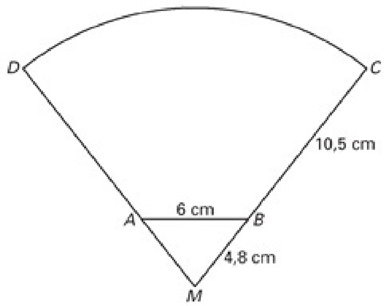
Het gedeelte van het voetstuk tussen de vlakken $ABCD$ en $EFGHKLMN$ wordt geschilderd: de vier vierhoekige zijvlakken worden rood en de vier driehoekige zijvlakken worden zwart. Om te weten hoeveel verf nodig is, moet men de oppervlakte weten.

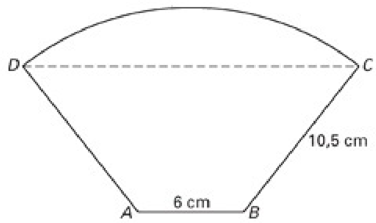
e Bereken de totale oppervlakte van de delen die rood geschilderd worden. Rond je antwoord af op gehele cm^2.

(bron: examen wiskunde B1,2 havo 2003, opgave 1)

Opgave 10: Koffiefilter en koffiefilterhouder

In platgedrukte toestand (in de verpakking) heeft een filterzakje een vorm die ontstaat door uit een cirkelsector DMC de gelijkbenige driehoek AMB weg te laten (bekijk de figuren hieronder). We gaan uit van de volgende afmetingen: $AB = 6$ cm, $MB = 4{,}8$ cm en $BC = 10{,}5$ cm. Plakrandjes laten we buiten beschouwing.





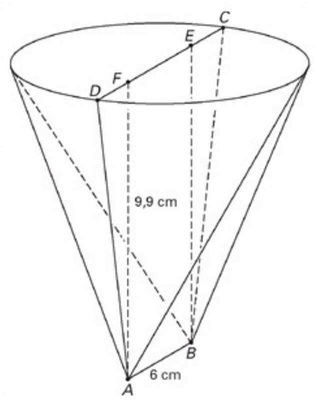
Figuur 9

a $\angle CMD$ is, afgerond op een geheel aantal graden, gelijk aan 77°. Toon dat aan.

b Een koffiefilter (zie figuur) wordt opengeknipt langs de zijden CB en BA en daarna opengevouwen om de zijde AD. Zo ontstaat er een uitslag van het koffiefilter. Teken deze uitslag op schaal 1 : 3.

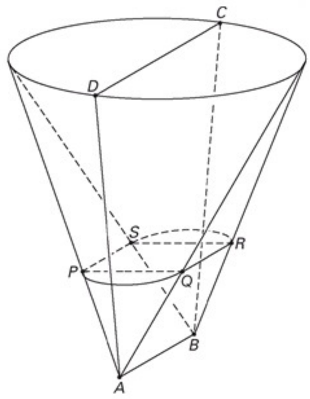
In de figuur hiernaast is een model van een koffiefilterhouder getekend. De hoogte AF is 9,9 cm. De onderkant is het lijnstuk AB met een lengte van 6 cm. De bovenrand van de houder heeft de vorm van een cirkel.
Een filter wordt opengevouwen in de koffiefilterhouder geplaatst. We nemen aan dat daarbij de bovenste rand van het filter precies samenvalt met de bovenste rand van de filterhouder. De afstand tussen de punten C en D van het filter wordt bij het openvouwen natuurlijk kleiner.

c Bereken de middellijn CD van de filterhouder. Geef je antwoord in centimeters, afgerond op één decimaal.



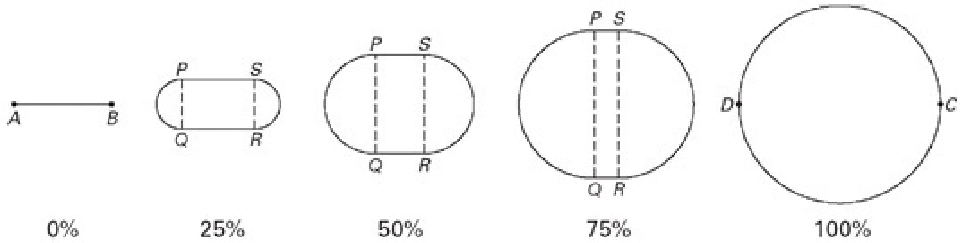
Figuur 10

In de figuur hiernaast is op een bepaalde hoogte de dwarsdoorsnede van de koffiefilterhouder getekend. Deze dwarsdoorsnede is een figuur die bestaat uit een rechthoek $PQRS$ en twee halve cirkels met middellijnen PQ en RS. We nemen aan dat CD exact gelijk is aan 13 cm.



Figuur 11

Hieronder zijn (op schaal) parallelle doorsneden getekend van de houder op 0%, 25%, 50%, 75% en 100% van de hoogte.



Figuur 12

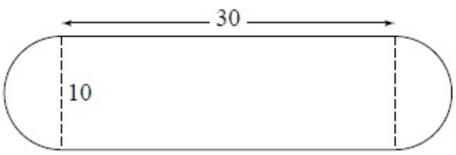
d Bereken de oppervlakte van de dwarsdoorsnede op eenderde deel van de hoogte. Geef je antwoord in cm^2.

(bron: examen wiskunde B1,2 havo 2004)

Opgave 11: Kaas

Op de foto hiernaast zie je drie stukken kaas. Het zijn delen van een hele, ronde kaas. Het grootste stuk is precies de helft van een hele kaas. Deze halve kaas heeft een vlakke zijkant. De vorm van de vlakke zijkant bestaat bij benadering uit een rechthoek van 30 cm bij 10 cm en twee halve cirkels met een diameter van 10 cm.

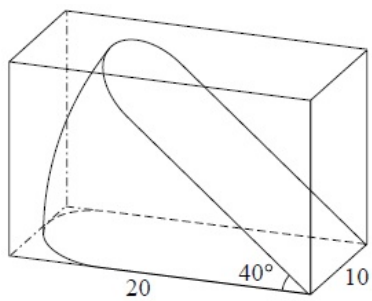
Figuur 13



Figuur 14

a Bereken de oppervlakte van de vlakke zijkant. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm^2.

Als je verticaal door het midden van de kaas snijdt, kun je stukken kaas maken zoals die ook op de foto hierboven te zien zijn. Bij een van de stukken kaas op die foto maken de snijvlakken een hoek van 40° met elkaar. Zo'n stuk wordt met een snijvlak op de bodem van een balkvormig doosje gelegd. De binnenmaten van het grondvlak van het doosje zijn 20 cm bij 10 cm. Zie de figuur hiernaast.



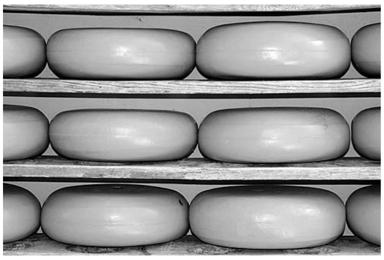
Figuur 15

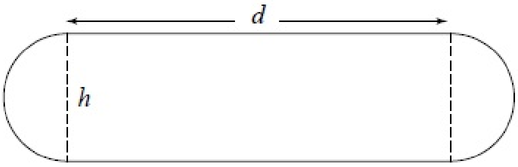
b Bereken hoe hoog de binnenkant van dit doosje minimaal moet zijn om dit stuk kaas er in te laten passen. Geef je antwoord in een geheel aantal centimeters.

Het volume van hele kazen die de vorm hebben van de kaas op de foto hierboven, kan worden berekend met behulp van de volgende formule:

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{8}\pi^2 d h^2 + \frac{1}{4}\pi d^2 h$$

Hierin is V het volume in cm^3, h is de hoogte van de kaas in cm en d is de zogeheten binnendiameter van de kaas in cm.





Figuur 16

Iemand wil kazen maken met deze vorm. Het volume van een hele kaas moet 5000 cm^3 zijn en de hoogte moet 8 cm zijn. De kaas wordt gerijpt in een kamer van 3,50 m lang. Over de hele lengte van de kamer zijn planken tegen de muur aan gemaakt waarop de kazen naast elkaar kunnen liggen.

c Bereken hoeveel van deze kazen er maximaal naast elkaar op een plank kunnen liggen als ze worden neergelegd zoals de foto hiernaast.

d Als de binnendiameter 0 wordt, ontstaat een bolvormige kaas. De inhoud van deze bolvormige kaas kun je ook uitrekenen met bovenstaande formule van V. Vul $d = 0$ in de formule van V in en werk de formule die hierbij ontstaat om tot de bekende formule voor de inhoud van een bol met straal r.

(bron: herexamen wiskunde B havo 2009, opgave 1)