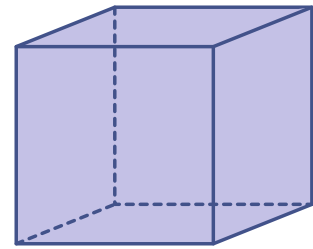


2.4 Schaalvergroting

Inleiding

Stel je maakt een vergroting van deze kubus. Alle ribben worden 3 keer zo lang. Hoeveel keer zo groot wordt de oppervlakte? Hoeveel keer zo groot wordt de inhoud?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met de lengtevergrotingsfactor;
- werken met de oppervlaktevergrotingsfactor;
- werken met de inhoudsvergrotingsfactor.

Voorkennis

- de oppervlakte en de inhoud van vlakke en ruimtelijke figuren berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Een beroemd probleem uit de Oudheid was dat van de 'verdubbeling van de kubus'. Een kubus met ribben van 1 m lengte heeft een inhoud van 1 m^3 . Hoe groot moet je een kubus maken (welke lengte krijgen de ribben) om hem een inhoud van 2 m^3 te geven?

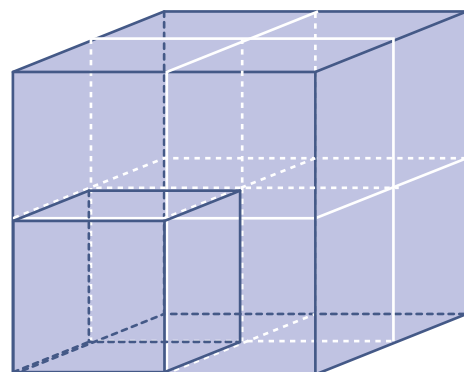
- Kun je dit probleem oplossen?
- Wat zegt dit over oppervlaktevergroting en lengtevergroting?

Uitleg

Je ziet wat er gebeurt als je van een kubus alle ribben 2 keer zo groot maakt:

- Alle lengtes worden 2 keer zo groot.
- Alle oppervlaktes worden $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ keer zo groot.
- De inhoud wordt $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ keer zo groot.

Omdat een inhoud niet meer is dan de som van een (niet altijd geheel) aantal eenheidskubussen, geldt dit voor elk lichaam. Bovendien kun je het veralgemeniseren tot een lengtevermenigvuldiging met factor k . Als alle lengtes k keer zo groot worden, worden alle oppervlaktes k^2 keer zo groot en de inhoud k^3 keer zo groot.



Figuur 2

Opgave 1

Van een bepaald lichaam zijn alle afmetingen bekend. Je maakt precies zo'n lichaam, maar met alle afmetingen 2 keer zo groot.

- Hoeveel keer zo groot wordt de oppervlakte van het lichaam?
- Hoeveel keer zo groot wordt de inhoud van het lichaam?

Opgave 2

Van een bepaald lichaam is de inhoud bekend. Je maakt precies zo'n lichaam, maar met een twee keer zo grote inhoud.

- Hoeveel keer zo groot worden de afmetingen van het lichaam?
- Hoeveel keer zo groot wordt de oppervlakte van het lichaam?

Opgave 3

Van een bepaald lichaam is de oppervlakte bekend. Je maakt precies zo'n lichaam, maar met een twee keer zo grote oppervlakte.

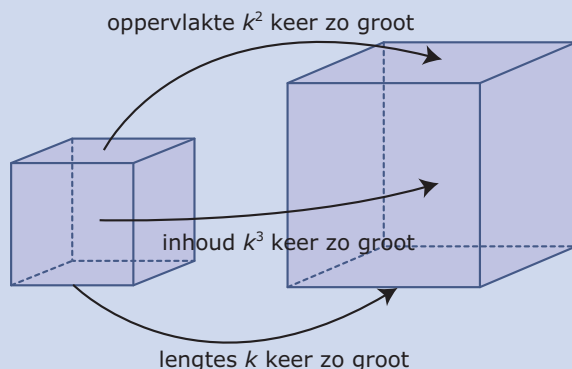
- Hoeveel keer zo groot worden de afmetingen van het lichaam?
- Hoeveel keer zo groot wordt de inhoud van het lichaam?

Theorie en voorbeelden**Om te onthouden**

Wanneer van een ruimtelijke figuur alle lengtes met eenzelfde factor k worden vermenigvuldigd, dan geldt:

- de **lengtevergrotingsfactor** is k .
- de **oppervlaktevergrotingsfactor** is k^2 .
- de **inhoudsvergrotingsfactor** is k^3 .

Bij twee gelijkvormige figuren kan de ene figuur uit de andere ontstaan door zo'n vermenigvuldiging met een vaste vergrotingsfactor (of verkleiningsfactor).

**Figuur 3****Voorbeeld 1**

Bij een schaalmodel van een voorwerp worden alle lengtes met een vaste vergrotingsfactor verkleind. Dit model van een Smart ForTwo heeft een schaal van 1 : 18.

De afmetingen van een echte Smart ForTwo van deze versie zijn: lengte 250 cm, breedte 152 cm en hoogte 155 cm. De cilinderinhoud van de motor is 698 cm^3 en in de tank gaat 33 liter benzine. De totale glasoppervlakte is ongeveer $3,2 \text{ m}^2$. Bereken de afmetingen van het schaalmodel, het glasoppervlak van het schaalmodel en hoeveel liter benzine verhoudingsgewijs in de tank zou passen.

**Figuur 4**

Antwoord

Schaal 1 : 18 betekent dat de lengtevergrotingsfactor van de werkelijke auto naar schaalmodel $\frac{1}{18}$ is.

Dus de lengte van het schaalmodel is $\frac{1}{18} \cdot 250 \approx 13,9$ cm, de breedte $\frac{1}{18} \cdot 152 \approx 8,4$ cm en de hoogte $\frac{1}{18} \cdot 155 \approx 8,6$ cm.

De oppervlaktevergrotingsfactor is $\left(\frac{1}{18}\right)^2$, dus de glasoppervlakte van het schaalmodel is $\left(\frac{1}{18}\right)^2 \cdot 3,2 \approx 0,00988$ m². En dit is ongeveer 98,8 cm².

De inhoudsvergrotingsfactor is $\left(\frac{1}{18}\right)^3$, dus de cilinderinhoud van het schaalmodel is $\left(\frac{1}{18}\right)^3 \cdot 698 \approx 0,12$ cm³.

In de tank van het schaalmodel gaat $\left(\frac{1}{18}\right)^3 \cdot 33 \approx 0,0057$ liter en dat is ongeveer 5,7 cm³.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je dat het schaalmodel van de Smart ForTwo een schaal heeft van 1 : 18.

- Hoeveel bedraagt de vergrotingsfactor van het schaalmodel ten opzichte van de werkelijke auto?
- Het stuur van een Smart is cirkelvormig met een diameter van 40 cm. Hoe groot is de diameter van het stuurwiel van het schaalmodel? Geef je antwoord in centimeters.
- Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van de carrosserie van de auto (romp zonder wielen) ten opzichte van het schaalmodel?
- Als de inhoud van het schaalmodel ongeveer 0,35 liter is, hoeveel is dan de inhoud van een Smart ForTwo?

Opgave 5

Een voetbal heeft een diameter van 22 cm en een tennisbal van 6,5 cm.

- Hoe groot is de exacte lengtevergrotingsfactor van de voetbal ten opzichte van de tennisbal? Rond af op twee decimalen.
- Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van de voetbal? Rond af op twee decimalen.
- Hoeveel keer zo groot is de inhoud van de voetbal? Rond af op twee decimalen.

Voorbeeld 2

Je hebt twee gelijkvormige cilindrische maatbekers I en II. Maatbeker I heeft een inhoud van 300 mL en maatbeker II heeft een inhoud van 500 mL.

Hoe verhouden zich de hoogtes en de diameters van beide maatbekers?

Antwoord

Beide maatbekers zijn gelijkvormig, maatbeker II heeft een inhoud die $\frac{500}{300} = \frac{5}{3}$ keer zo groot is als die van maatbeker I. De inhoudsvergrotingsfactor is $\frac{5}{3}$.

Als k de lengtevergrotingsfactor is, dan moet gelden dat $k^3 = \frac{5}{3}$. Dit betekent, dat $k = \sqrt[3]{\frac{5}{3}} \approx 1,186$.

De diameter en de hoogte van maatbeker II zijn dus ongeveer 1,186 keer zo groot als die van maatbeker I.

Opgave 6

Je ziet een aantal wijnflessen. De Bouteille is een normale wijnfles van 0,75 liter. Neem aan dat al deze flessen gelijkvormig zijn.



Figuur 5

- Hoeveel keer zo hoog is een Magnum in vergelijking met een Fillette? Geef de factor in één decimaal nauwkeurig.
- Voor een Magnum wordt even dik glas gebruikt als voor een Bouteille. Hoeveel keer zo veel glas is er voor nodig? Geef de factor in één decimaal nauwkeurig.
- Een Bouteille heeft een hoogte van 36 cm. Hoe hoog is een Melchior? Geef je antwoord in centimeters.

Opgave 7

Dit glas heeft de vorm van een omgekeerde kegel op een voet. De hoogte van deze kegel is (gerekend aan de binnenkant van het glas) 10 cm.

Hoe hoog staat de vloeistofspiegel onder de bovenrand als het glas half vol is? Geef je antwoord in centimeters.



Figuur 6

Verwerken**Opgave 8**

Een kunstenaar maakt van een groot bronzen beeld eerst een model op schaal 1 : 20. Het schaalmodel heeft een oppervlakte van 1400 cm^2 en een inhoud van 3000 cm^3 .

Bereken de oppervlakte en de inhoud van het bronzen beeld.

Opgave 9

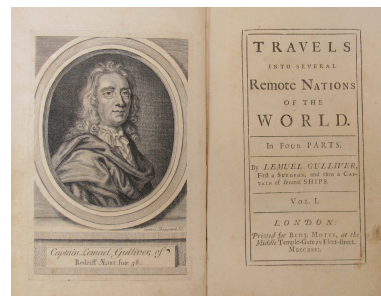
Je kunt een bepaalde soort verf kopen in blikken van 1 liter en in blikken van 5 liter. Deze blikken zijn gelijkvormig.

- Hoeveel keer zo hoog is het 5 liter blik vergeleken met het 1 liter blik? Rond af op twee decimalen.
- Als beide blikken worden gemaakt uit een even dikke metaalplaat, hoeveel keer zo veel metaal is er dan voor het 5 liter blik nodig? Rond af op twee decimalen.
- En hoe zit dat als het metaal ook in dezelfde verhouding dikker wordt?

Opgave 10

Jonathan Swift bedacht in zijn boek 'Gulliver's travels' het volk uit Lilliput. De bewoners van Lilliput zijn verkleiningen van echte mensen met een factor 10. Ga eens uit van een Lilliputter die een perfecte verkleining is van jouzelf.

- Hoeveel weegt die Lilliputter ten opzichte van jou?
- Hoeveel keer zo weinig huidoppervlakte heeft die Lilliputter in vergelijking met jijzelf?
- De voedselbehoefte van zoogdieren is ongeveer recht evenredig met de huidoppervlakte omdat dit vooral nodig is om de lichaamstemperatuur op peil te houden en het temperatuurverlies vooral afhangt van de huidoppervlakte. Schat hoeveel gram voedsel jij per dag zelf nodig hebt en bereken hoeveel dat voor de Lilliputter zou moeten zijn.
- Hoeveel procent van je eigen lichaamsgewicht moet jij dagelijks eten? En de Lilliputter? In deze opgave wordt uitgegaan van een lichaamsgewicht van 80 kg.
- Waarom geldt voor zoogdieren dat de benodigde hoeveelheid voedsel recht evenredig is met het kwadraat van de lengte?
- Leg uit dat voor zoogdieren de benodigde hoeveelheid voedsel per kg lichaamsgewicht recht evenredig is met $l^{\frac{2}{3}}$, waarin l de lichaamslengte is.



Figuur 7

Opgave 11

In een kubusvormige bak $ABCD.EFGH$ met ribben van 6 cm staat een massieve kegel op het grondvlak $ABCD$. Deze kegel raakt alle ribben van het grondvlak en de top T zit recht boven het midden van het grondvlak. De bak is van boven open en de kegel steekt zo ver boven de kubus uit, dat nog $\frac{3}{4}$ deel zich binnen de kubus bevindt.

Hoe hoog is deze kegel? Geef je antwoord in centimeters.

Opgave 12

Een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ heeft een grondvlak van 6 bij 6 en een hoogte van 8. Door vlak $EFGH$ dat evenwijdig aan het grondvlak van de piramide loopt, wordt hij verdeeld in twee delen met dezelfde inhoud.

Wat is de hoogte van de afgeknotte piramide $ABCD.EFGH$? Rond af op twee decimalen.

Toepassen

In de **modelbouw** willen mensen het liefst dat de eigenschappen van bijvoorbeeld de voertuigen en gebouwen op werkelijke grootte in hun modellen behouden blijven. Dit geldt niet alleen voor hobbyisten, maar ook bijvoorbeeld voor ontwerpers van vliegtuigen die de aerodynamische eigenschappen van hun ontwerp willen uittesten op een model.



Figuur 8

Opgave 13

In de luchtvaart wordt de vorm van de vleugels in een getal uitgedrukt met het begrip slankheid. De formule voor slankheid is $\lambda = \frac{b^2}{A}$. Hierbij is b de spanwijdte en A de oppervlakte van de vleugels. Ga er voor het gemak van uit dat de vleugels rechthoekig zijn.

- Een modelvliegtuig heeft een vleugeloppervlak dat 900 keer zo klein is dan die van het werkelijke vliegtuig. Wat gebeurt er met de slankheid?

Een modeltrein weegt 1,5 kg. Het is gemaakt van hetzelfde materiaal als de werkelijke trein. De werkelijke trein weegt 768 ton.

De snelheid van de modeltrein moet de werkelijkheid zo goed mogelijk nabootsen. De werkelijke trein heeft een topsnelheid van 100 km/h.

- b** Hoe groot moet de topsnelheid van de modeltrein zijn?

Een raket bestaat grofweg uit een cilinder met een kegel erop. Een amateur-raketwetenschapper heeft een modelraket van 125 kg gebouwd die, wanneer afgevuurd, 250 m hoog in de lucht komt. Hij heeft berekend dat een raket met de verhoudingen van zijn model een hoogte h (m) behaalt die evenredig is met het verschil van de massa van de cilinder en de massa van de kegel. Dus $h = c \cdot (m_1 - m_2)$, waarbij c een constante is, m_1 de massa van de cilinder en m_2 de massa van de kegel.

- c** Stel dat de kegel en de cilinder van een raket op werkelijke grootte van precies dezelfde materialen gemaakt worden als het model. Je wilt dat een raket 100 km de lucht in gaat. Hoe zwaar moet de werkelijke raket worden?

Testen

Opgave 14

Baboesjka's zijn poppetjes die in elkaar passen. Je ziet hier een set van vijf baboesjka's, nummer ze van klein naar groot I, II, III, IV en V. Ga er van uit de vier kleinste baboesjka's gelijkvormig zijn.

- a** Waaraan zie je dat de grootste baboesjka (nr. V) niet gelijkvormig is met de kleinste (nr. I)?
- b** Baboesjka nr. III is precies twee keer zo hoog als nr. I. Hoeveel keer zo groot is het volume van nr. III?
- c** Baboesjka nr. IV heeft een twee keer zo grote inhoud als baboesjka nr. III. Hoeveel keer zo hoog is baboesjka nr. IV?



Figuur 9

Opgave 15

De spoorlijn van Arnhem naar Leeuwarden was in september 1868 geheel klaar. De lengte van deze spoorlijn is 166 km. Op een kaart is deze spoorlijn 8,3 cm lang.

Hoeveel bedraagt de schaal van die kaart?

Opgave 16

Een ringslang met een lengte van 1 m heeft een gewicht van 240 gram en een huidoppervlakte van 483 cm^2 . Een boa constrictor is een slang die veel groter is. Een bepaalde boa weegt 51,84 kg. Beide soorten slangen hebben dezelfde verhoudingen.

Hoe groot is de huidoppervlakte van deze boa constrictor?



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
