

2.3 Inhoud

Inleiding

Dit is een foto van 'Le Kinémax', één van de spectaculaire gebouwen in het multimedia themapark Parc du Futuroscope bij Poitiers in Frankrijk.

De inhoud van dit gebouw is nog niet zo gemakkelijk te berekenen. Je moet daarvoor het object kunnen verdelen in herkenbare vormen zoals kubus, balk, piramide, e.d.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- formules voor de inhoud van allerlei basislichamen;
- de inhoud berekenen van enkele afgeknotte basislichamen;
- de inhoud berekenen van ruimtelijke figuren die bestaan uit een samenstelling van die (afgeknotte) basislichamen.

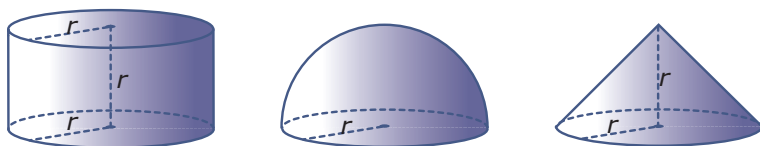
Voorkennis

- de inhoud van een balk en een rechte cilinder berekenen;
- de inhoud van een rechte piramide en een rechte kegel berekenen.

Verkennen

Opgave V1

De beroemde Griekse wiskundige **Archimedes** (287—212 v.Chr.) hield zich veel bezig met het berekenen van de inhoud van lichamen. Hij ontdekte dat de inhoud van een (rechte) cilinder, een halve bol en een (rechte) kegel met dezelfde straal en hoogte zich verhouden als 3 : 2 : 1.



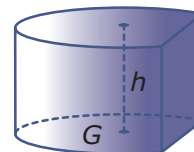
Figuur 2

- Hoe bereken je de inhoud van een (rechte) cilinder met straal r en hoogte r ?
- Welke inhoud heeft de (rechte) kegel?
- Leid hieruit een formule voor de inhoud van een bol af.

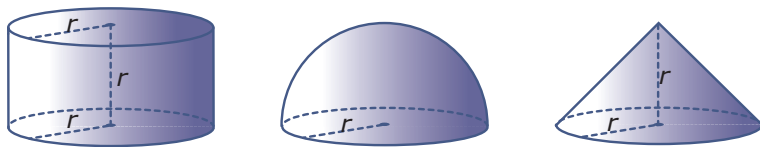
Uitleg

Je weet dat de inhoud (het volume) van alle figuren die de vorm hebben van een prisma of een cilinder met G als oppervlakte van het grondvlak en h als hoogte, gelijk is aan $G \cdot h$. Volgens het principe van Cavalieri geldt dit zelfs als het een schief prisma of een scheve cilinder betreft, zolang h maar loodrecht op grondvlak (en bovenvlak) wordt gemeten.

De inhoud (het volume) V van een rechte cilinder is daarom $V_{\text{cilinder}} = \pi r^2 h$.



Figuur 3



Figuur 4

De beroemde Griekse wiskundige **Archimedes** (287—212 v.Chr.) hield zich veel bezig met het berekenen van de inhoud van lichamen. Hij ontdekte dat de inhoud van een (rechte) cilinder, een halve bol en een (rechte) kegel met dezelfde straal en hoogte zich verhouden als 3 : 2 : 1.

De inhoud van deze cilinder is: $\pi r^2 \cdot h = \pi r^2 \cdot r = \pi r^3$.

De inhoud van de halve bol is daar $\frac{2}{3}$ deel van en de inhoud van de kegel is daar $\frac{1}{3}$ deel van.

Hiermee vind je voor de inhoud van een hele bol: $V_{\text{bol}} = 2 \cdot \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3$.

Opgave 1

Je ziet in de **Uitleg** verschillende inhoudsformules voor de cilinder, bol en kegel.

- Bereken exact de inhoud van een cilinder met een straal van 10 cm en een hoogte van 20 cm.
- In de cilinder bij a past precies een bol. Bereken exact de inhoud van die bol.

Opgave 2

Onze aarde is bij ruwe benadering een bol met een omtrek van 40000 km.

Hoe groot is de inhoud van de aarde? Geef je antwoord in km^3 in de wetenschappelijke notatie met vier significante cijfers.

Opgave 3

Stel, je hebt een object met een vorm waarvan je de inhoud niet met behulp van formules kunt berekenen. Kun je een praktische manier bedenken om toch de inhoud van het lichaam te bepalen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je weet dat de **inhoud (het volume)** van alle figuren die de vorm hebben van een prisma of een cilinder met G als oppervlakte van het grondvlak en h als hoogte, gelijk is aan $G \cdot h$.

De **inhoud van een balk** is daarom

$$V_{\text{balk}} = G \cdot h = l \cdot b \cdot h.$$

De **inhoud van een rechte cilinder** is daarom

$$V_{\text{cilinder}} = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h.$$

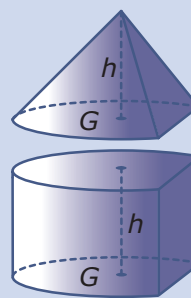
Je weet dat de inhoud (het volume) van alle figuren die de vorm hebben van een piramide of een kegel met G als oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte, gelijk is aan $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

De **inhoud van een rechte piramide** is daarom

$$V_{\text{piramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h.$$

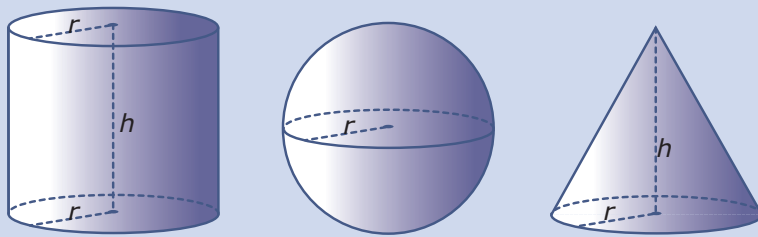
En de **inhoud van een rechte kegel** is daarom

$$V_{\text{kegel}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h.$$



Figuur 5

Volgens het principe van Cavalieri geldt dit alles ook voor scheve prisma's, piramides, cilinders of kegels, zolang h maar loodrecht op grondvlak (en bovenvlak) staat.



Figuur 6

De **inhoud van een bol** is: $V_{\text{bol}} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Voorbeeld 1

Je ziet een afgeknotte kubus. $AB = 6$ cm en $BF = 4$ cm.
Bereken de inhoud van deze afgeknotte kubus.

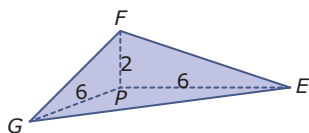
Antwoord

De complete kubus $ABCD.EPGH$ heeft een inhoud van $6^3 = 216$ cm³.

Daarvan is een piramide afgesneden waarvan (bijvoorbeeld) F de top is en $\triangle EPG$ het (rechthoekige) grondvlak. Punt P is het van de kubus afgesneden achtste hoekpunt. De inhoud van deze piramide kun je berekenen met $V(F.EPG) = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

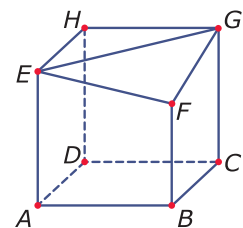
Met $G = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$ cm².

En dus is de inhoud van de piramide $V(F.EPG) = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 2 = 12$ cm³.



Figuur 8

De afgeknotte kubus heeft daarom een inhoud van $216 - 12 = 204$ cm³.



Figuur 7

Opgave 4

Je ziet in **Voorbeeld 1** hoe je de inhoud van een afgeknotte kubus berekent. Van kubus $ABCD.EFGH$ met ribben van 10 cm wordt het deel dat hoekpunt F bevat, afgezaagd. Het zaagvlak is vlak EBG .

Bereken exact de inhoud van de overblijvende afgeknotte kubus.

Opgave 5

Je kunt de inhoud van lichamen die de vorm hebben van een prisma of een cilinder berekenen, door de oppervlakte van het grondvlak met de hoogte te vermenigvuldigen. Dit principe geldt heel algemeen voor lichamen waarvan elke doorsnede evenwijdig aan het grondvlak precies hetzelfde is als dat grondvlak.

- Bereken de exacte inhoud van een regelmatig driezijdig prisma met ribben van 6 cm.
- Bereken de exacte hoeveelheid plastic (cm³) die nodig is voor een holle cilindervormige buis met een lengte van 1,5 m, een binnendiameter van 14 mm en een buitendiameter van 18 mm.



Figuur 9

- c Je ziet een houten voorwerp. De oppervlakte van het zijaanzicht is ongeveer 55 cm^2 . Bereken uit hoeveel cm^3 hout 1 meter van dit voorwerp bestaat.

Voor de inhoud van lichamen die de vorm hebben van een piramide of een kegel neem je $\frac{1}{3}$ van de oppervlakte van het grondvlak maal de hoogte.

- d Bereken de exacte inhoud van een regelmatige vierzijdige piramide met ribben van 6 cm.
- e Bereken de exacte inhoud van een regelmatig viervlak met ribben van 6 cm. Je mag gebruiken dat de hoogte van dit regelmatig viervlak gelijk is aan $\sqrt{24}$.
- f De inhoud van dit ijshoorntje heeft een kegelvorm. De hoogte van de kegel is 10 cm, de diameter 4 cm.

Hoeveel is de inhoud exact?



Figuur 10

Voorbeeld 2

Je ziet een afgeknotten regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.EFGH$. Dit betekent dat het grondvlak een vierkant is, evenals het bovenvlak. Bovendien staat het lijnstuk ST , dat het midden van het grondvlak verbindt met het midden van het bovenvlak loodrecht op beide vlakken.

Gegeven is: $AB = 6$, $EF = 3$ en $ST = 6$,

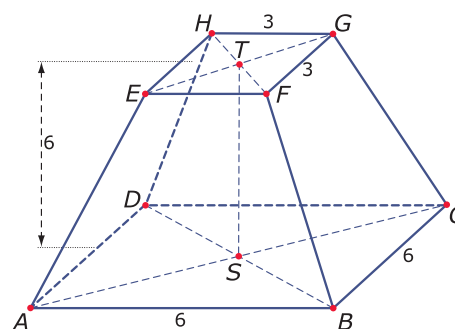
Bereken de inhoud van de afgeknotten piramide.

Antwoord

De afgeknotten piramide is het verschil van een grote piramide met grondvlak 6 bij 6 en hoogte $x + 6$ en een kleinere piramide met grondvlak 3 bij 3 en hoogte van x .

Nu is: $\frac{x}{x+6} = \frac{3}{6}$ en dus is $x = 6$.

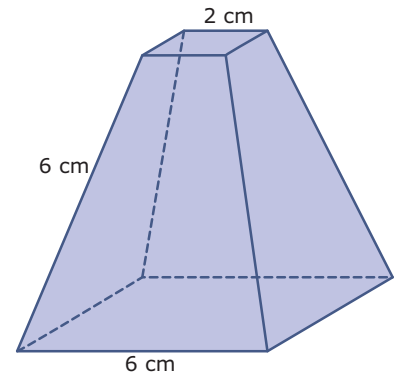
De inhoud van de afgeknotten piramide is: $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6 = 126$.



Figuur 11

Opgave 6

Bereken de inhoud van deze afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide. Geef je antwoord in cm^3 in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 12

Voorbeeld 3

Je ziet een paaltje dat ook wel een 'amsterdammertje' wordt genoemd. In grote lijnen is zo'n paaltje een afgeknotte rechte kegel met een hoogte van 90 cm, een grondcirkel met een straal van 10 cm en een bovencirkel met een straal van 6 cm waar bovenop een halve bol ligt. De rand aan de bovenkant en de drie kruisen worden niet meegerekend. Als zo'n metalen paaltje massief is, hoeveel cm^3 metaal is er dan voor nodig?

Antwoord

De afgeknotte kegel is het verschil van een grote kegel met straal 10 en hoogte $90 + h$ en een kleinere kegel met straal 6 en hoogte h . Met verhoudingen bereken je h : $\frac{h}{90+h} = \frac{6}{10}$. Dit levert op: $h = 135$ cm

De (afgeknotte) kegelmantel heeft een inhoud van

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 225 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 135 \approx 18472,6 \text{ cm}^3.$$

De halve bol heeft een inhoud van $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 \approx 452,4 \text{ cm}^3$.

De totale inhoud is ongeveer $18473 + 452 = 18925 \text{ cm}^3$.



Figuur 13

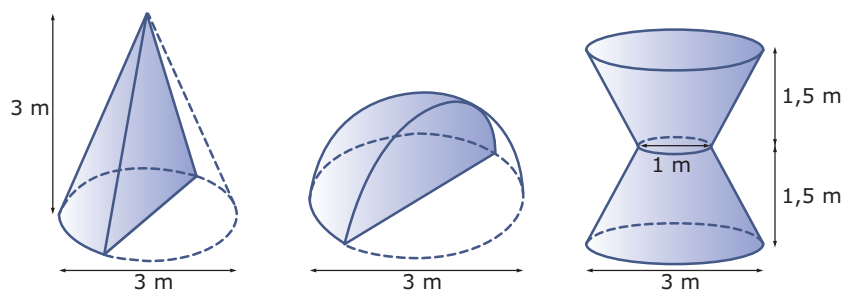
Opgave 7

Je hebt gezien hoe je de inhoud van het amsterdammertje uit het voorbeeld berekent. Stel je voor dat het amsterdammertje van binnen hol is en dat het metaal overal een dikte heeft van 2 mm.

Hoeveel metaal is er dan voor nodig? Geef je antwoord in gehele cm^3 .

Verwerken**Opgave 8**

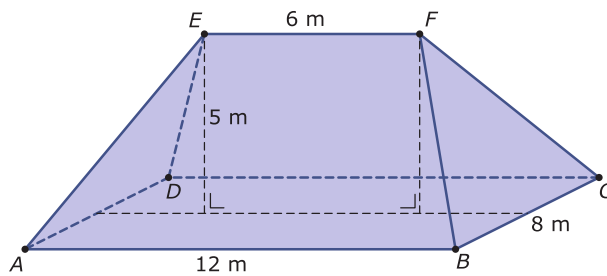
Bereken de exacte inhoud van de volgende figuren.



Figuur 14

Opgave 9

Je ziet een zogenaamd schilddak, een dakvorm met een rechthoekig grondvlak $ABCD$, waarbij de nok EF van het dak precies boven het midden van het grondvlak zit. Het dak zelf bestaat uit twee gelijkzijdige driehoeken en twee symmetrische trapezia.

**Figuur 15**

Bereken het volume onder dit schilddak.

Opgave 10

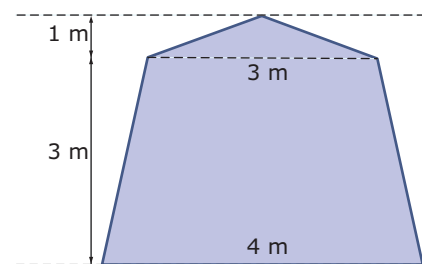
Een piramide $T.ABCDE$ heeft als grondvlak een regelmatige vijfhoek $ABCDE$. De hoogte van de piramide is TS , waarin punt S het middelpunt is van de cirkel waar de hoekpunten van het grondvlak op liggen. Alle ribben van deze piramide hebben een lengte van 4.

Bereken de inhoud van deze piramide in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 11

Je ziet het zijaanzicht van een zuiver cirkelvormige tent.

Bereken de exacte inhoud van deze tent.

**Figuur 16****Opgave 12**

Je ziet een L-vormige cilindrische holle buis van staal. Het vierkante grondplaatje van 150 mm bij 150 mm wordt aan de muur bevestigd. De buis steekt dan 450 mm naar voren en 250 mm omhoog. De binnendiameter van de buis is 48 mm en het staal is 1 mm dik.

Staal weegt $7,8 \text{ g/cm}^3$.

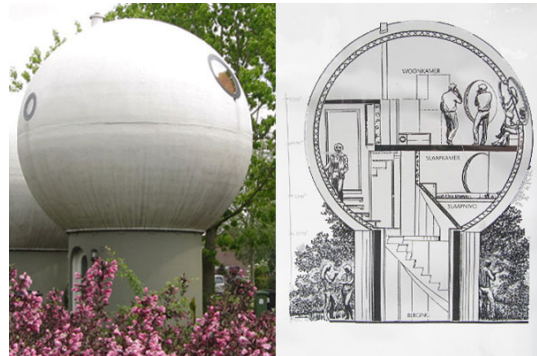
Hoe zwaar is deze buis inclusief het grondplaatje? Rond af op een geheel aantal grammen.

**Figuur 17**

Toepassen

Je ziet hier weer de zogenaamde **bolwoningen** met daarbij een afbeelding van de doorsnede van zo'n woning.

Voor het berekenen van de inhoud van de bolwoning moet je rekening houden met de inhoud van een bolsegment (of bolkap). De inhoud van een bolsegment met hoogte h , waarbij de bol straal r heeft, wordt gegeven door $\frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$.



Figuur 18

Opgave 13

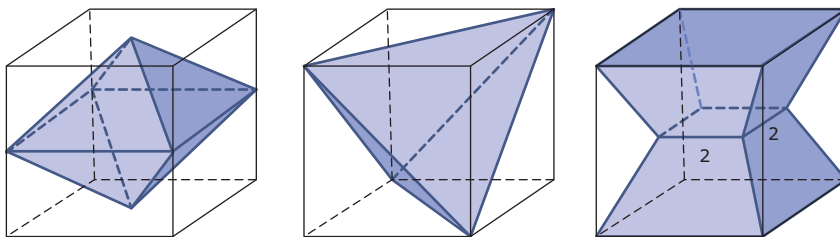
Bekijk het verhaal van de bolwoningen.

- Een equivalente (gelijke) formule voor de inhoud van een bolsegment is $\frac{1}{6}\pi h(3a^2 + h^2)$. Hierbij is a de straal van het bolsegment. Vind een geschikte uitdrukking voor a en leid deze formule uit de eerder gegeven formule af.
- Welke inhoud hebben deze bolwoningen als de diameter van de bol zelf 8 meter en die van de cilinder 6 meter is, terwijl de hoogte van de cilinder 3 meter is? Geef je antwoord exact.

Testen

Opgave 14

Bereken de inhoud van de volgende lichamen die precies passen in een kubus met ribben van 6 cm.



Figuur 19

Opgave 15

De binnenkant van dit drinkglas heeft de vorm van een afgeknotte kegel. De diameter van de bovensirkel van deze kegel is 100 mm, die van de grondcirkel is 80 mm. De hoogte deze afgeknotte kegel is 200 mm.

Hoeveel bedraagt de inhoud van dit glas in mm^3 nauwkeurig?



Figuur 20

Opgave 16

Je ziet een huis van De Waura indianen. Zo'n huis kun je wiskundig beschrijven als een halve (liggende) cilinder waarop aan weerszijden een kwart bol zit. Neem aan dat dit huis zo'n 6 m hoog is en dat de halve cilinder een lengte heeft van 8 m.



Figuur 21

Bereken de inhoud van dit huis in m^3 .



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
