

2.2 Oppervlakte lichamen

Inleiding

Nu je de oppervlakte van allerlei vlakke figuren kunt berekenen is het tijd om te kijken naar de oppervlakte van ruimtelijke objecten. Als je er een uitslag van kunt maken is het bepalen van de oppervlakte eenvoudig: het is de oppervlakte van de uitslag. Maar hoe zit het dan met een kegel, een cilinder, een bol? Of kun je daar ook een uitslag van maken?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met de oppervlakteformule van de bol;
- de oppervlakte berekenen van ruimtelijke figuren waar je een uitslag van kunt maken.

Voorkennis

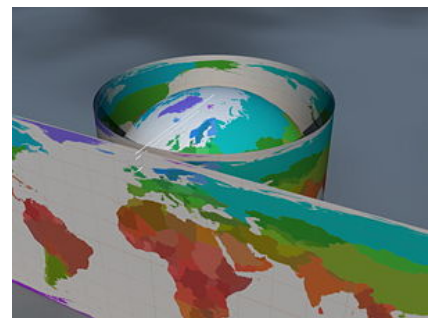
- de oppervlakte van de belangrijkste vlakke figuren berekenen;
- de oppervlakte van daaruit samengestelde vlakke figuren berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Bij het maken van een wereldkaart gaat het om een projectie van de Aardbol op een plat vlak. In 1772 bedacht de wiskundige **Johann Heinrich Lambert** (1728—1777) de zogenaamde **orthografische cilinderprojectie** waarbij de Aarde vanuit een punt op zijn as wordt afgebeeld op een cilinder om de evenaar. De projectielijn is loodrecht op de aardas.

Deze projectie heeft als voordeel dat hij oppervlaktegetrouw is: de oppervlakte van elk deel van de Aarde houdt na projectie dezelfde oppervlakte. En dit betekent dat je zo een bol met straal r afbeeldt op een cilinder met straal r en hoogte $2r$, terwijl de oppervlakte van beide hetzelfde is.



Figuur 2

- Hoe bereken je de oppervlakte van een cilinder met straal r en hoogte h ?
- Leid hieruit een formule voor de oppervlakte van een bol af.

Uitleg 1

Bij het maken van een wereldkaart gaat het om een projectie van de aardbol op een plat vlak. In 1772 bedacht de wiskundige **Johann Heinrich Lambert** (1728–1777) de zogenaamde **orthografische cilinderprojectie** waarbij de aarde vanuit een punt op zijn as wordt afgebeeld op een cilinder om de evenaar. De projectielijn is loodrecht op de aardas.

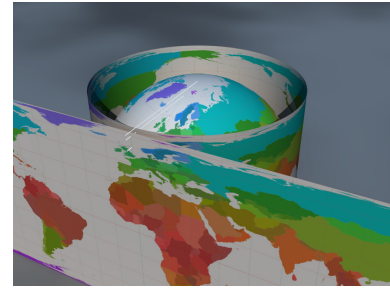
Deze projectie heeft als voordeel dat het oppervlaktegetrouw is: de oppervlakte van elk deel van de aarde houdt na projectie dezelfde oppervlakte. En dit betekent dat je zo'n bol met straal r afbeeldt op een cilinder met straal r en hoogte $2r$, terwijl de oppervlakte van beide hetzelfde is.

Nu is een cilinder met straal r en hoogte h niets anders dan een opgerolde rechthoek met lengte $2\pi r$ (de omtrek van de grondcirkel) en breedte h . Je hebt dan alleen de cilindermantel, niet de oppervlaktes van de grondcirkel en de bovenscirkel. Zo'n cilindermantel heeft een oppervlakte van:

$$\text{opp}(\text{cilindermantel}) = 2\pi r \cdot h$$

Omdat een bol met straal r dezelfde oppervlakte heeft als een cilinder met straal r en hoogte $2r$ geldt:

$$\text{opp}(\text{bol}) = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$$



Figuur 3

Opgave 1

In **Uitleg 1** staan enkele oppervlakteformules.

- Bereken exact de oppervlakte van een cilinder met een straal van 10 cm en een hoogte van 20 cm. Reken behalve de cilindermantel ook het grondvlak en het bovenvlak mee.
- Stel een formule op voor de oppervlakte van een cilinder als ook grondvlak en bovenvlak meetellen.
- In de cilinder bij a past precies een bol. Bereken de oppervlakte van die bol.

Opgave 2

Onze aarde is bij ruwe benadering een bol met een omtrek van 40000 km. Hoe groot is de oppervlakte van de aarde? Geef je antwoord in miljoenen km^2 .

Uitleg 2

Je ziet een rechte kegel met top T en als grondvlak een cirkel met straal $MA = r$. Het lijnstuk TM dat het midden van het grondvlak verbindt met de top, staat loodrecht op de grondcirkel. Dus de hoogte h van de kegel is TM . Voor deze kegel is $r = 2$ en $h = 6$.

De uitslag van zo'n kegel bestaat uit de grondcirkel en de opgevouwen kegelmantel. Deze kegelmantel is een cirkelsector met straal $AT = \sqrt{r^2 + h^2}$ en middelpunt T .

De omtrek van de bijbehorende cirkel is $2\pi \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$.

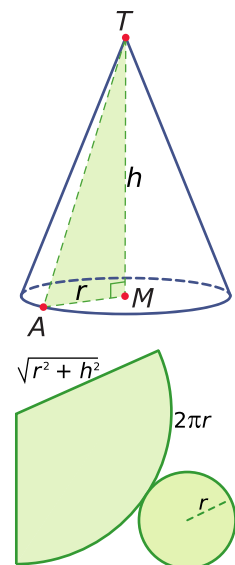
De omtrek van de grondcirkel van de kegel is $2\pi r$.

De kegelmantel is daarom het $\frac{2\pi r}{2\pi \sqrt{r^2 + h^2}}$ deel van een cirkel met een oppervlakte

van $\pi \left(\sqrt{r^2 + h^2} \right)^2$.

De oppervlakte van de kegelmantel is dus gelijk aan

$$\frac{2\pi r}{2\pi \sqrt{r^2 + h^2}} \cdot \pi \left(\sqrt{r^2 + h^2} \right)^2 = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}.$$



Figuur 4

Er geldt: $\text{opp}(\text{kegelmantel}) = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$.

De oppervlakte van het grondvlak is $\pi \cdot r^2$.

De totale oppervlakte van een kegel is dan $\pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} + \pi \cdot r^2$.

Met $r = 2$ en $h = 6$ wordt de oppervlakte van deze kegel: $2\pi\sqrt{40} + 4\pi$.

Opgave 3

In **Uitleg 2** wordt een formule afgeleid voor de oppervlakte van een kegelmantel.

- a** Bereken in twee decimalen nauwkeurig met behulp van die formule de oppervlakte van een kegel met een straal van 5 en een hoogte van 8. Reken het grondvlak mee.

De gegeven formule kun je ook schrijven als $\text{opp}(\text{kegelmantel}) = \pi r R$, waarin $r = AM$ (de straal van de grondcirkel) en $R = AT$ (de straal van de grotere cirkel waar de kegelmantel een sector van is).

- b** Licht dit toe.
c Bereken de tophoek (de hoek bij top T) van deze kegel in graden.

Opgave 4

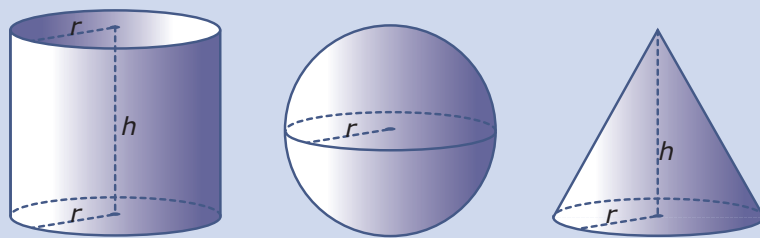
De oppervlakte van een ruimtelijke figuur (een lichaam) is gelijk aan de som van de oppervlaktes van de grensvlakken van die figuur.

- a** Bereken de oppervlakte van een kubus met ribben van 6 cm.
b Bereken exact de oppervlakte van een regelmatige vierzijdige piramide met ribben van 6 cm.
c Bereken exact de oppervlakte van een regelmatig viervlak met ribben van 6 cm.
d Bereken exact de oppervlakte van een regelmatig driezijdig prisma met ribben van 6 cm.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **oppervlakte van een lichaam** is gelijk aan de oppervlakte van de uitslag van dat lichaam. Vaak bestaat zo'n uitslag uit eenvoudige vlakke figuren waarvan je de oppervlakte kunt berekenen. De oppervlakte van het lichaam is dan de som van de oppervlaktes van die vlakke figuren.



Figuur 5

De **oppervlakte van een cilindermantel** met straal r en hoogte h is: $2\pi \cdot r \cdot h$.

Deze formule geldt alleen voor een rechte cilinder: dit betekent dat h loodrecht op de grondcirkel en bovcirkel staat.

De **oppervlakte van een bol** met straal r is: $4\pi \cdot r^2$.

De **oppervlakte van een kegelmantel** met straal r en hoogte h is: $\pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$.

Deze formule geldt alleen voor een rechte kegel: dit betekent dat hoogte h loodrecht op de grondcirkel staat.

Voorbeeld 1

Je ziet een afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.EFGH$. Dit betekent dat het grondvlak een vierkant is, evenals het bovenvlak. Bovendien staat het lijnstuk ST , dat het midden van het grondvlak verbindt met het midden van het bovenvlak loodrecht op beide vlakken.

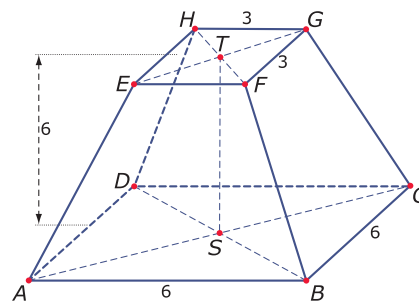
Gegeven is: $AB = 6$, $EF = 3$ en $ST = 6$

Bereken de totale oppervlakte van de afgeknotte piramide.

Antwoord

De uitslag van zo'n afgeknotte piramide bestaat uit een vierkant van 6 bij 6 en een vierkant van 3 bij 3 en vier gelijke trapezia. De hoogte van zo'n trapezium kun je berekenen door bijvoorbeeld vanuit F een loodlijn naar het grondvlak te tekenen. Je vindt dan dat die hoogte gelijk is aan $\sqrt{6^2 + 1,5^2}$. De hoogte van het trapezium is dus $\sqrt{38,25}$ en heeft twee evenwijdige zijden van 6 en 3.

$$opp(ABCD.EFGH) = 6^2 + 3^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (6 + 3) \cdot \sqrt{38,25} \approx 156,3$$



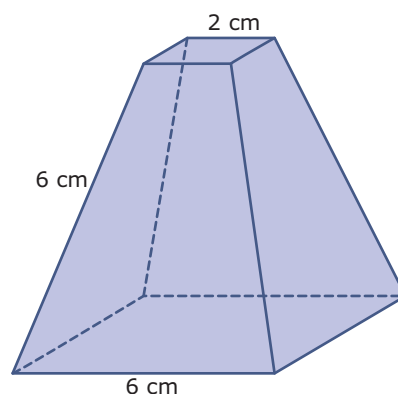
Figuur 6

Opgave 5

Leg uit waarom de hoogte van het trapezium uit **Voorbeeld 1** gelijk is aan $\sqrt{38,25}$.

Opgave 6

Bereken exact de oppervlakte van deze afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide.



Figuur 7

Voorbeeld 2

Dit is een 'amsterdammertje', een paaltje in Amsterdam om onder andere wildparkeren tegen te gaan. In grote lijnen is zo'n paaltje een afgeknotte rechte kegel met een hoogte van 90 cm, een grondcirkel met een straal van 10 cm en een bovenscirkel met een straal van 6 cm waar bovenop een halve bol ligt. De rand aan de bovenkant en de drie kruisen worden niet meegerekend.

Ga ervan uit dat er 5 liter verf nodig is voor een oppervlakte van 40 m^2 . Hoeveel liter verf is er dan nodig om alle 6500 amsterdammertjes in een bepaalde wijk te schilderen?



Figuur 8

Antwoord

Geschilderd worden de (afgeknotte) kegelmantel en de halve bol. De afgeknotte kegel is het verschil van een grote kegel met straal 10 en hoogte $90 + h$ en een kleinere kegel met straal 6 en hoogte h . Met verhoudingen bereken je h : $\frac{h}{90+h} = \frac{6}{10}$. Dit levert op: $h = 135$ cm.

De (afgeknotte) kegelmantel heeft een oppervlakte van

$$\pi \cdot 10 \cdot \sqrt{10^2 + 225^2} - \pi \cdot 6 \cdot \sqrt{6^2 + 135^2} \approx 4528,4 \text{ cm}^2.$$

De halve bol heeft een oppervlakte van $0,5 \cdot 4\pi \cdot 6^2 \approx 226,2 \text{ cm}^2$.

De te schilderen oppervlakte is ongeveer $6500 \cdot (4258,4 + 226,2) = 30904900 \text{ cm}^2$.

Dat is ongeveer $3090,5 \text{ m}^2$ en daar is ongeveer 386,3 liter verf voor nodig.

Opgave 7

Je hebt gezien hoe je de oppervlakte van een figuur kunt berekenen die is samengesteld uit een afgeknotte kegel en een halve bol. Heel vaak is een lichaam op te vatten als een samenstelling van (delen van) andere lichamen.

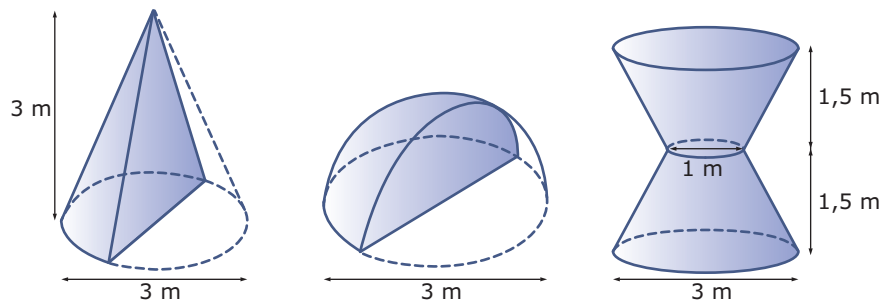
Een surprise zit in een cilinder met een diameter van 10 cm en een hoogte van 20 cm met daarop een kegelvormige punt met een hoogte van 5 cm.

Bereken in cm^2 de totale buitenoppervlakte van de verpakking. Maak eventueel zelf een schets van de situatie.

Verwerken

Opgave 8

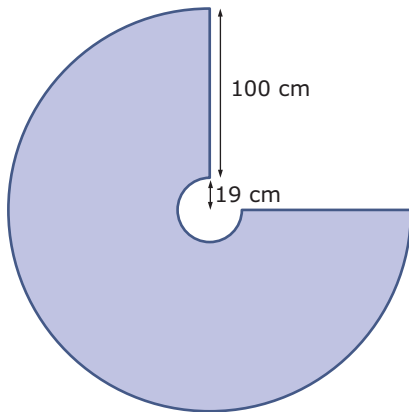
Bereken de oppervlaktes van de volgende figuren. Geef je antwoord in m^2 in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 9

Opgave 9

Arabische dansende derwisjen dragen vaak een zogenaamde kegelrok. Dat is een breed uitlopende rok die, als de stof stijf zou zijn, de vorm heeft van een afgeknotte kegel. Je ziet het patroon (de uitslag) van zo'n kegelrok.



Figuur 11

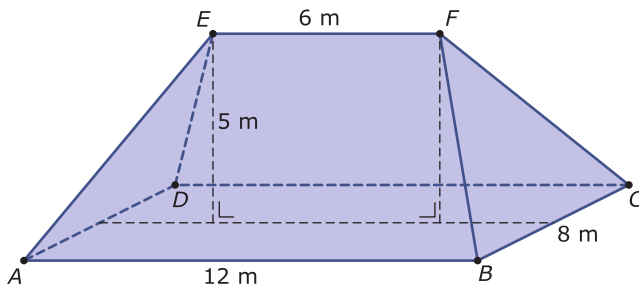
Bereken in dm^2 de hoeveelheid stof die er voor deze rok nodig is.



Figuur 10

Opgave 10

Je ziet een zogenaamd schilddak, een dakvorm met een rechthoekig grondvlak $ABCD$, waarbij de nok EF van het dak precies boven het midden van het grondvlak zit. Het dak zelf bestaat uit twee gelijkzijdige driehoeken en twee symmetrische trapezia.



Figuur 12

Bereken de exacte oppervlakte van dit schilddak.

Opgave 11

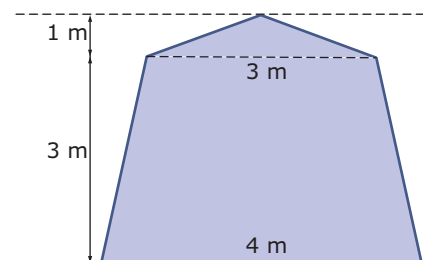
Een piramide $T.ABCDE$ heeft als grondvlak een regelmatige vijfhoek $ABCDE$. De hoogte van de piramide is TS , waarin punt S het middelpunt is van de cirkel waar de hoekpunten van het grondvlak op liggen. Alle ribben van deze piramide hebben een lengte van 4.

Bereken de oppervlakte van deze piramide in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 12

Je ziet het zijaanzicht van een zuiver cirkelvormige tent.

Bereken de oppervlakte van deze tent, dus de hoeveelheid tentdoek die je ervoor nodig hebt, in m^2 in twee decimalen nauwkeurig.

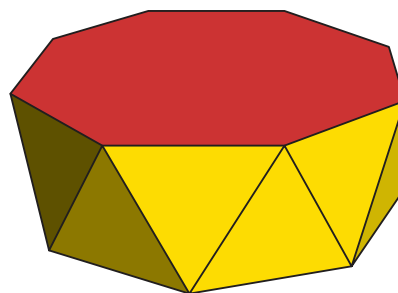


Figuur 13

Opgave 13

Deze figuur is een regelmatig achthoekig antiprisma. Een antiprisma onderscheidt zich van een gewoon prisma doordat het boven- en ondervlak verbonden zijn door driehoekjes die om en om 180° gedraaid zijn. Het boven- en ondervlak zijn daardoor ten opzichte van elkaar verschoven en gedraaid. Alle ribben van dit antiprisma zijn 4 cm.

Bereken de oppervlakte van dit antiprisma in cm^2 .



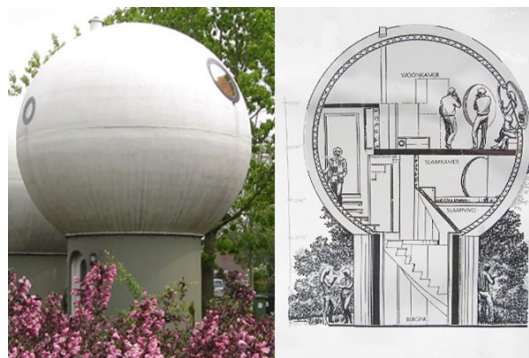
Figuur 14

Toepassen

De welbekende vijftig bolwoningen met hun opvallende architectuur staan in 's-Hertogenbosch. De **bolwoning** is ontworpen door de beeldhouwer, ontwerper en architect Dries Kreijkamp geboren in 1937 te Tegelen. Ze zijn gebouwd in 1984, met het doel om de bewoners te laten verbinden met de natuur, mede door de diverse ronde ramen die in de woningen aanwezig zijn. Tevens zijn de woningen milieuvriendelijk. Door de bolvorm heeft de wind er namelijk bijna geen greep op en daarnaast zijn ze zo ontworpen dat ze energiezuinig en goedkoop zijn. Het zijn huurwoningen voor één of twee personen.

Voor het berekenen van de oppervlakte van de buitenkant van deze bolwoningen tel je de oppervlakte van een bol bij die van een cilinder op. Je ziet echter dat je dan een bolsegment (of bolkap) te veel meetelt.

De beroemde Griekse wiskundige Archimedes (287–212 v.Chr.) ontdekte dat de oppervlakte van een bol gelijk is aan de oppervlakte van diens omgeschreven cilinder. Bovendien ontdekte hij dat dit ook geldt voor een bolsegment. Dit betekent dat voor de oppervlakte van een bolsegment met hoogte h geldt $2\pi rh$, waarbij r de straal van de bol is.



Figuur 15

Opgave 14

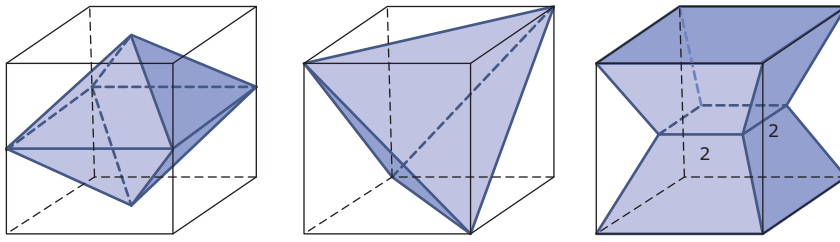
Bekijk het verhaal van de bolwoningen.

- a De formule die Archimedes vond voor de oppervlakte van een bolsegment met hoogte h was $opp(bolsegment) = \pi(a^2 + h^2)$. Hierbij is a de straal van het bolsegment. Leid deze formule zelf af.
- b Welke oppervlakte hebben deze bolwoningen als de diameter van de bol 8 meter en die van de cilinder 6 meter is, terwijl de hoogte van de cilinder 3 meter is? Geef je antwoord in m^2 .

Testen

Opgave 15

Bereken de oppervlakte van de volgende lichamen die precies passen in een kubus met ribben van 6 cm.



Figuur 16

Opgave 16

De Constanzina schemerlamp is meer bedoeld als een sfeerbrenger dan als een optimale werkplekverlichter. Dat neemt niet weg dat deze lamp het kantoor een sfeervol aanzien geeft of het nu met de witte kap is of met een mengeling van kleuren. Deze lamp heeft een kapje in de vorm van een afgeknotte kegel. De hoogte van die afgeknotte kegel is 20 cm, de bovencirkel heeft een diameter van 15 cm en de ondercirkel een diameter van 30 cm.

Hoe groot is de oppervlakte van het materiaal van het kapje? Rond af op gehele cm^2 .



Figuur 17

Opgave 17

De Waura indianen wonen in het Amazonegebied in Brazilië. Hun dorpen bestaan uit een aantal grote huizen. Je ziet een afbeelding van zo'n huis. Je kunt het wiskundig beschrijven als een halve (liggende) cilinder waarop aan weerszijden een kwart bol zit. Neem aan dat dit huis zo'n 6 m hoog is en dat de halve cilinder een lengte heeft van 8 m.



Figuur 18

Bereken de oppervlakte van dit huis in m^2 .



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
