2.1 Oppervlakte vlakke figuren

Inleiding

Dit is een foto van 'Le Kinémax', één van de spectaculaire gebouwen in het multimedia themapark Parc du Futuroscope bij Poitiers in Frankrijk.
Hoeveel m^2 glas is er wel niet in dit gebouw verwerkt? Daarvoor moet je de oppervlakte van allerlei vlakke figuren kunnen berekenen...

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de oppervlakteformules van allerlei vlakke figuren;
- de oppervlakte berekenen van samengestelde vlakke figuren.

Voorkennis

- de oppervlakte van rechthoek, driehoek en cirkel berekenen;
- vlakke figuren opdelen in driehoeken, rechthoeken, delen van cirkels, etc.

Verkennen

Opgave V1

De oppervlakte van een figuur vind je door hem te verdelen in rechthoeken en halve rechthoeken, dat geldt zelfs (als benadering) voor een cirkel. Van een rechthoek weet je de oppervlakte: $opp(rechthoek) = lengte \times breedte$. Leid nu zelf een formule af voor de oppervlakte van de volgende figuren.

a Een willekeurige driehoek.

b Een gelijkzijdige driehoek.

c Een willekeurig parallellogram.

d Een willekeurig trapezium, dat is een vierhoek waarvan twee overstaande zijden evenwijdig zijn.

e Een cirkel (uitgaande van de omtrekformule $omtrek(cirkel) = 2\pi r$ waarin r de straal van de cirkel is).

Uitleg 1

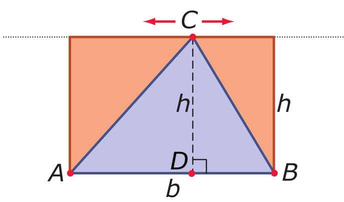
Bekijk de applet: principe van Cavalieri

De oppervlakte van een figuur kun je vinden door hem te verdelen in rechthoeken en halve rechthoeken. Van een rechthoek ken je de formule voor de oppervlakte: $opp(rechthoek) = lengte \cdot breedte$.

In de figuur zie je hoe de oppervlakte van een driehoek de helft is van de oppervlakte van de rechthoek waarvan de lengte gelijk is aan de basis b en de breedte gelijk is aan de hoogte h van de driehoek:

$opp(driehoek) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$

De basis staat altijd loodrecht op de hoogte.



Figuur 2

Uit de figuur kun je ook opmaken dat zolang de basis en hoogte niet veranderen, de oppervlakte van de driehoek niet verandert. Je kunt dus de vorm van de driehoek veranderen door C evenwijdig aan de basis te verschuiven zonder de oppervlakte te veranderen. Dit heet het principe van Cavalieri.

Als de hoogte van een driehoek niet is gegeven, maar er is wel een hoek bekend, moet je die hoogte eerst berekenen om de oppervlakte te vinden.

Op vergelijkbare wijze vind je oppervlakteformules voor een parallellogram, een trapezium, een vlieger, een gelijkzijdige driehoek, een ruit, enzovoort.

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**.

a Neem aan dat $AB = 5$, $AD = 1$ en $h = 4$ en laat zien dat de oppervlakte van ΔABC inderdaad 10 is door hem in twee halve rechthoeken te verdelen.

b Doe hetzelfde als $AD = 2$.

c Teken zelf een willekeurige scherphoekige driehoek ABC. Neem aan dat $AD = p$, $BD = q$, $AB = b$ en $CD = h$. Toon aan dat $opp(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$.

d Neem aan dat $AB = 5$, $AD = 1$ en $h = 4$. Nu ligt echter punt D links van A. Laat zien dat de oppervlakte van ΔABC inderdaad 10 is door hem in twee halve rechthoeken te verdelen.

e Teken zelf een willekeurige stomphoekige driehoek ABC met D links van A. Neem aan dat $AD = p$, $AB = b$ en $CD = h$. Toon aan dat *oppervlakte (ΔABC)* $= \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$.

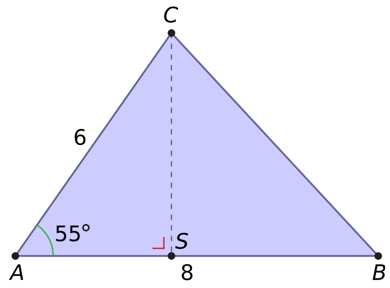
Opgave 2

Je ziet ΔABC met $\angle A = 55°$, $AC = 6$ en $AB = 8$.

Je moet nu eerst de hoogte van de driehoek berekenen met behulp van goniometrie.

a Bereken de hoogte CS loodrecht op AB.

b Bereken hiermee de oppervlakte van ΔABC.



Figuur 3

Uitleg 2

Bekijk de applet: oppervlakte cirkel

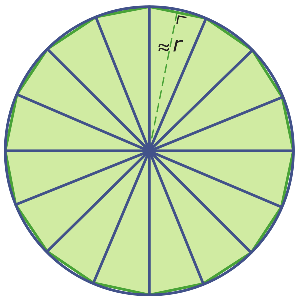
De oppervlakte van een cirkel met straal r kun je vinden door hem op te delen in n gelijkbenige driehoekjes met het middelpunt als tophoek en de twee andere hoekpunten op de cirkel. Als n groot genoeg is, ontstaan er n driehoeken met een hoogte van (ongeveer) r en een basis van (ongeveer) $\frac{\text{omtrek cirkel}}{n}$.

De omtrek van een cirkel met straal r is $2\pi r$. De oppervlakte van zo'n driehoek is dan gelijk aan:

$$opp(driehoek) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r}{n} \cdot r$$

De oppervlakte van de cirkel is dan:

$$opp(cirkel) = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r}{n} \cdot r = \pi r^2$$



Figuur 4

En uit de formule voor de oppervlakte van een cirkel kun je dan weer de oppervlakte van een cirkelsector afleiden.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**.

Leg uit hoe daarin de formule voor de oppervlakte van de cirkel wordt afgeleid uit die voor de omtrek. Welke aannames worden er gedaan?

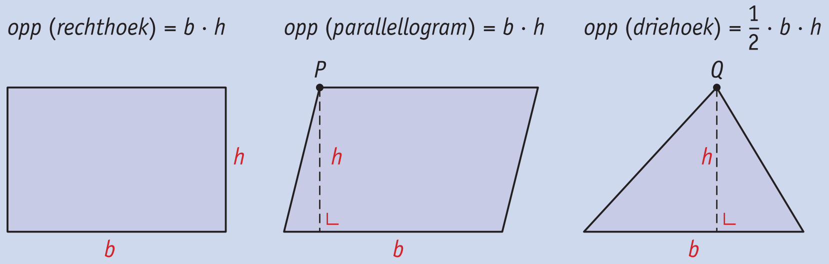
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De oppervlakte van een figuur kun je vinden door hem te verdelen in rechthoeken en halve rechthoeken, dat geldt zelfs (als benadering) voor een cirkel. Van een rechthoek met lengte l en breedte b weet je de oppervlakte: *oppervlakte (rechthoek)* $= l \cdot b$.

De volgende **oppervlakteformules** zijn handig om te onthouden:

Bekijk de applet.



Figuur 5

Door de punten P dan wel Q evenwijdig aan de basis te verplaatsen verandert de oppervlakte niet. Dit heet het **principe van Cavalieri**.

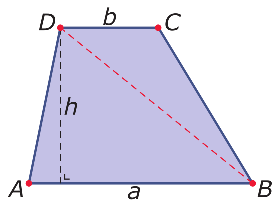
De **omtrek van een cirkel** met straal r is: *omtrek (cirkel)* $= 2\pi r$.
De **oppervlakte van een cirkel** met straal r is: *oppervlakte (cirkel)* $= \pi r^2$.

Met behulp van deze formules kun je ook exact de oppervlakte van bepaalde samengestelde vlakke figuren uitrekenen. Zoals bijvoorbeeld een figuur die bestaat uit halve cirkels en driehoeken.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: trapezium

Stel een formule op voor de oppervlakte van een trapezium $ABCD$, waarvan de evenwijdige zijden een lengte hebben van a en b en de hoogte h is.



Figuur 6

Antwoord

Trek diagonaal BD.
Deze diagonaal verdeelt het trapezium in twee driehoeken met dezelfde hoogte h:

- $opp(\Delta ABD) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$
- $opp(\Delta CDB) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$

En dus is de oppervlakte van het trapezium: $opp(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h + \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$

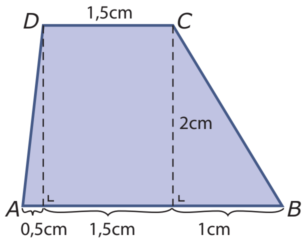
Opgave 4

In **Voorbeeld 1** wordt het berekenen van de oppervlakte van een trapezium besproken.

a Bekijk het trapezium. Bereken de oppervlakte door het te verdelen in een rechthoek en twee halve rechthoeken.

b Bereken de oppervlakte nog eens door het trapezium met behulp van een diagonaal in twee driehoeken te verdelen.

c Bereken ten slotte de oppervlakte met behulp van de oppervlakteformule die in het voorbeeld wordt afgeleid.

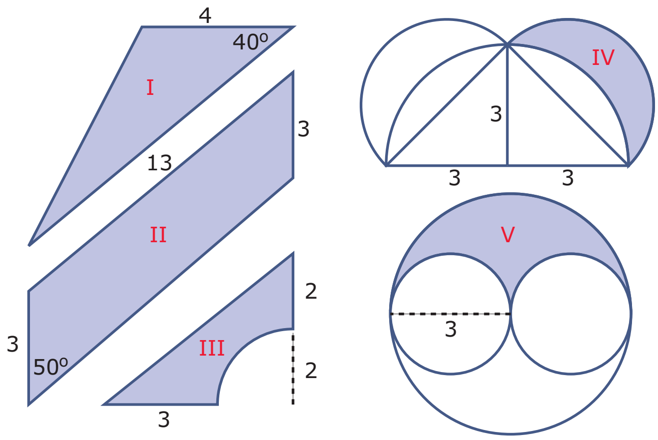


Figuur 7

Opgave 5

Je hebt een overzicht gekregen van de oppervlakteformules van een rechthoek, een parallellogram, een driehoek en een cirkel.

Gebruik deze formules om van deze vijf gekleurde gebieden de oppervlakte te berekenen. Ga ervan uit dat alle cirkelbogen precies hele, halve of kwart cirkels zijn en dat figuur II een parallellogram is. Rond indien nodig af op twee decimalen.



Figuur 8

Opgave 6

Van elke vlieger $ABCD$ staan de diagonalen AC en BD loodrecht op elkaar. Neem verder aan dat $AB = AD$.

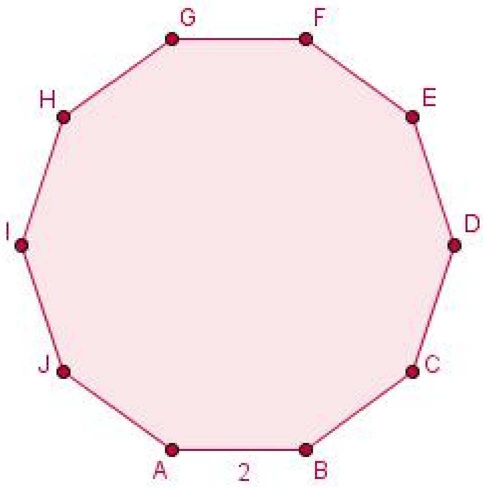
a Neem aan dat $AC = 6$ en $BD = 4$. Hoe groot is dan de oppervlakte van $ABCD$?

b Waarom maakt het voor de oppervlakte van deze vlieger niet uit waar het snijpunt van beide diagonalen precies zit? En klopt dat ook als het snijpunt van beide diagonalen niet op lijnstuk AC ligt, maar op het verlengde ervan? (Je hebt dan een pijlpuntvlieger.)

c Noem $AC = p$ en $BD = q$. Geef een formule voor de oppervlakte van een vlieger uitgedrukt in p en q.

Voorbeeld 2

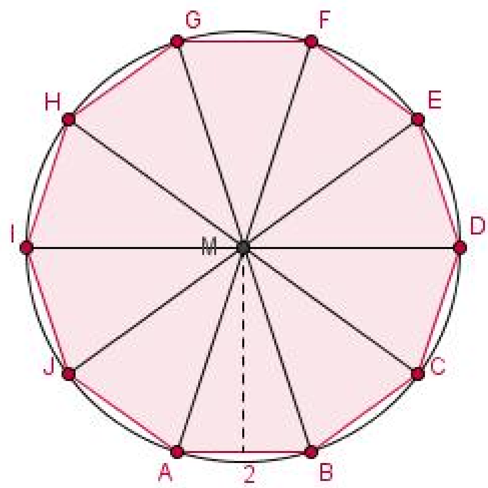
Bereken de oppervlakte van deze regelmatige tienhoek $ABCDEFGHIJ$ met zijden die een lengte hebben van 2.



Figuur 9

Antwoord

Van een regelmatige tienhoek zijn alle zijden en hoeken gelijk. Zo'n tienhoek past precies in een cirkel waarvan het middelpunt M in het midden van de tienhoek ligt. De tienhoek bestaat daarom uit tien congruente gelijkbenige driehoeken met tophoeken van $\frac{360°}{10} = 36°$.



Figuur 10

Eén van die driehoeken is bijvoorbeeld ΔABM.

De hoogte h van die driehoek kun je berekenen: $\tan(18°) = \frac{1}{h}$ en dus $h = \frac{1}{\tan(18°)}$.

De oppervlakte van ΔABM is $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\tan(18°)} = \frac{1}{\tan(18°)}$.

De oppervlakte van de tienhoek is daarom $\frac{10}{\tan(18°)} \approx 30{,}8$.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** wordt de oppervlakte van een regelmatige tienhoek berekend.

a Bereken de oppervlakte van een regelmatige zeshoek met zijden van 5 cm. Geef je antwoord in cm^2 in twee decimalen nauwkeurig.

b Bereken de oppervlakte van een regelmatige vijfhoek met zijden van 5 cm. Geef je antwoord in cm^2 in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 8

In **Voorbeeld 2** wordt de oppervlakte van een regelmatige tienhoek berekend.

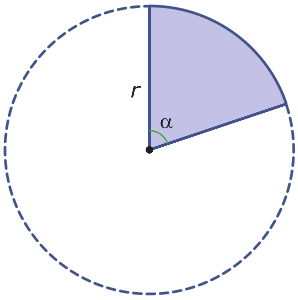
a Bereken in twee decimalen nauwkeurig de oppervlakte van een regelmatige twintighoek die precies past binnen een cirkel met een diameter van 10.

b Hoeveel is de oppervlakte van het gebied binnen de cirkel, maar buiten de regelmatige twintighoek bedoeld bij a?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet: cirkelsector

Stel een formule op voor de oppervlakte van een cirkelsector met straal r en sectorhoek α in graden.



Figuur 11

Antwoord

De oppervlakte van een cirkelsector is een deel van de oppervlakte van de hele cirkel. De grootte van de sectorhoek bepaalt met welk deel van de oppervlakte van de cirkel je te maken hebt.

Bij een sectorhoek van α heb je het $\frac{\alpha}{360}$ deel van de oppervlakte van de hele cirkel.

Dus: $opp(cirkelsector) = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2$.

Opgave 9

In **Voorbeeld 3** zie je hoe je de oppervlakte van een cirkelsector berekent.

a Stel dat je een sectorhoek hebt van 60° en een straal van 2.

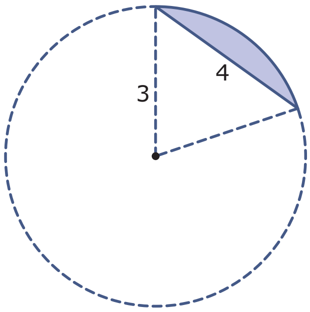
Leg uit waarom de oppervlakte van deze sector $\frac{1}{6}$ deel is van die van de cirkel.

b Bereken de oppervlakte van de cirkelsector in a in twee decimalen nauwkeurig en controleer je antwoord met de applet.

c Bereken nu de oppervlakte van een sector met een sectorhoek van 75° en een straal van 1,5. Rond af op twee decimalen.

Opgave 10

Bereken de oppervlakte van het cirkelsegment dat hier is ingekleurd. Rond af op twee decimalen.

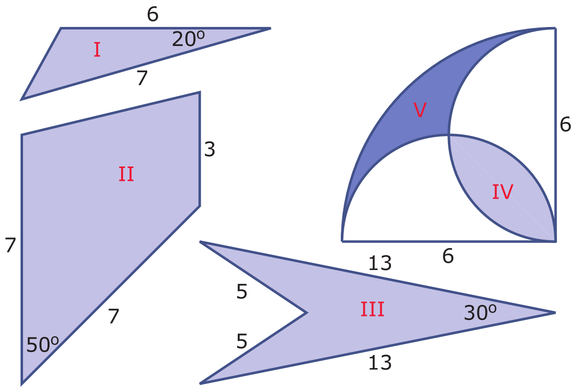


Figuur 12

Verwerken

Opgave 11

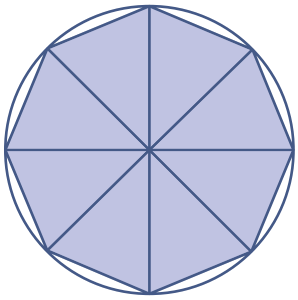
Bereken de oppervlaktes van de volgende figuren. Figuur II is een trapezium en figuur III een pijlpuntvlieger. De cirkelbogen die de vlakken IV en V begrenzen, zijn halve dan wel kwart cirkels. Rond zo nodig af op twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 13

Opgave 12

Van de regelmatige achthoek liggen alle hoekpunten op een cirkel met een straal van 5 cm.



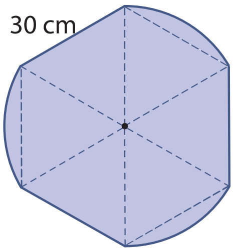
Figuur 14

Bereken de oppervlakte van het gebied dat buiten de achthoek en binnen de cirkel ligt. Geef je antwoord in cm^2 in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 13

Iemand maakt een driepotig krukje, waarvan je het bovenaanzicht ziet. De figuur bestaat uit een regelmatige zeshoek, waaraan op drie zijden een segment zit van de cirkel die door de hoekpunten van de zeshoek gaat.

Bereken zowel de oppervlakte als de omtrek van deze zitting. Geef de oppervlakte in cm^2 en de omtrek in centimeters.

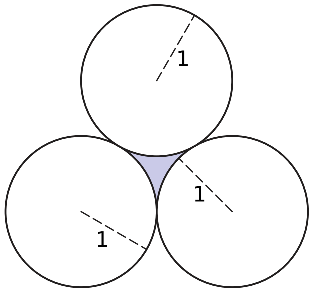


Figuur 15

Opgave 14

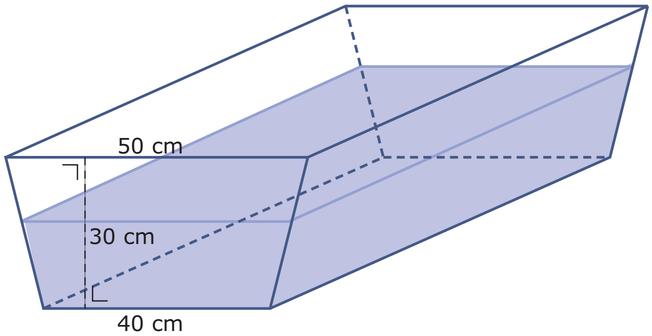
De straal van de drie cirkels in deze figuur is gelijk aan 1.

Bereken de exacte oppervlakte van de figuur die deze drie cirkels insluiten.



Figuur 16

Opgave 15



Figuur 17

Deze symmetrische bak staat precies half vol met water. De bak is 2 meter lang. De voorkant en de achterkant staan loodrecht op de bodem van de bak.

a Hoe hoog staat de waterspiegel gerekend vanaf de bodem van de bak? Geef je antwoord in centimeters.

b Hoe groot is de oppervlakte van de waterspiegel? Geef je antwoord in cm^2.

Toepassen

Een van de vele grote wiskundigen uit de Griekse Oudheid was **Heron van Alexandrië**. Hij leefde ongeveer van 10 tot 70 na Christus. Hij heeft een groot aantal formules bedacht, waaronder een formule om de oppervlakte van een driehoek te berekenen aan de hand van de lengtes van de drie zijden.
Deze formule staat ook wel bekend als de formule van Heron.
Stel dat een driehoek zijden a, b en c heeft, dan luidt de formule:

$\textit{oppervlakte} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Daarbij staat s voor de helft van de omtrek van de driehoek.

Opgave 16

Bekijk de formule van Heron.

a Waarom geldt $s = \frac{a+b+c}{2}$?

Gegeven is een rechthoekige driehoek met zijden van 3 cm, 4 cm en 5 cm.

b Bereken de oppervlakte van deze driehoek met de bekende formule met basis en hoogte.

c Bereken de oppervlakte met de formule van Heron. Ga na dat je dezelfde uitkomst krijgt.

d Bereken de oppervlakte van een driehoek met zijden van 12,9 cm, 9,3 cm en 11,8 cm. Rond af op twee decimalen.

Opgave 17: Bewegingssnelheid van aarde en maan

De planeten bewegen ongeveer in cirkels om de zon. De maan draait ongeveer in een cirkel om de aarde. Je kunt opzoeken hoe groot de straal van die banen (ongeveer) is en hoelang de planeten en de maan over één omwenteling doen.

De maan draait in ongeveer 27,32 dagen om de aarde en staat ongeveer 384450 km van de aarde af (gemiddeld).

a Met welke snelheid (in km/h) beweegt de maan om de aarde? Rond af op twee decimalen.

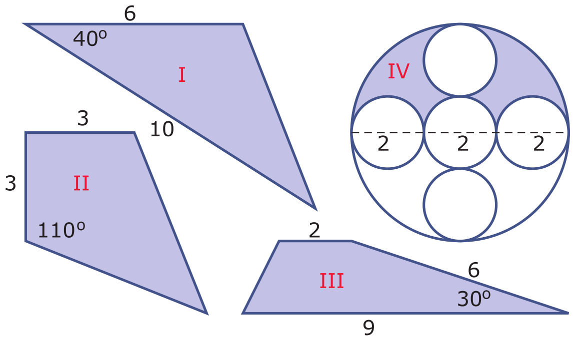
De aarde draait in ongeveer 365,25 dagen om de zon en staat ongeveer $149{,}6 \times 10^6$ km van de zon af (gemiddeld).

b Met welke snelheid (in km/h) beweegt de aarde om de zon? Rond af op twee decimalen.

Testen

Opgave 18

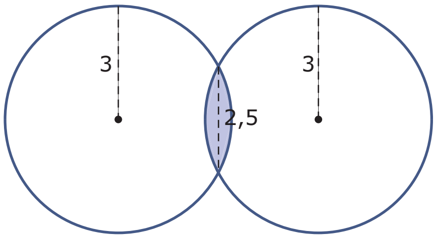
Bereken de oppervlaktes van de volgende figuren. Figuur II is een vlieger en figuur III een trapezium. Figuur IV is alleen het gekleurde gebied binnen een grote cirkel met daarin vijf kleinere cirkels. Rond zo nodig af op twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 18

Opgave 19

Bereken de oppervlakte van het gebied binnen beide cirkels in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 19