1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Ruimtelijke figuren**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- lichaam — projectie — parallelprojectie, wijkhoek en verkortingsfactor
- de stelling van Pythagoras — goniometrische verhoudingen: sinus, cosinus en tangens — gelijkvormigheid — vergrotingsfactor
- aanzicht — drieaanzicht — uitslag
- doorsnede
- serie parallelle doorsneden

Activiteitenlijst

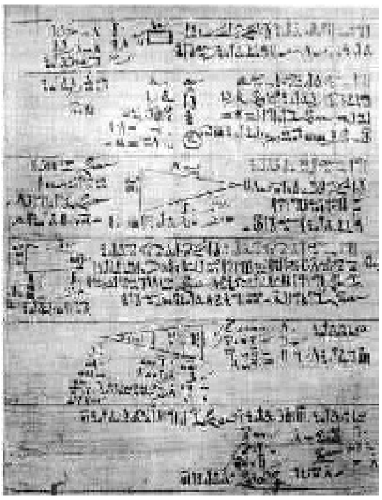
- een lichaam tekenen in parallelprojectie
- meetkundige berekeningen met de stelling van Pythagoras, goniometrie en gelijkvormigheid
- aanzichten en uitslagen tekenen en interpreteren
- doorsneden tekenen in een ruimtelijke figuur en op ware grootte
- een serie parallelle doorsneden tekenen en interpreteren

Achtergronden

Een duidelijk begin kent de meetkunde natuurlijk niet. Al vanaf de prilste oudheid kon de mens voorwerpen herkennen en benoemen. Dat er bepaalde wetmatigheden waren zoals:

- de verhouding van de omtrek en de diameter van een cirkel is een vast getal,
- een driehoek van 3 bij 4 bij 5 is rechthoekig,

etc., ontdekte de mens zo'n 5000 jaar geleden. Wellicht voor het eerst in Egypte, waar de leidende klasse (priesters en farao's) behoefte hadden aan metingen en berekeningen om vast te kunnen stellen wanneer de Nijl overstroomde, hoe een piramide werd gebouwd, een tijdrekening te organiseren, de oppervlakte van landerijen te bepalen om belastingen te kunnen heffen, e.d. Uit de Rhind papyrus blijkt dat de Egyptenaren al zo'n 4000 jaar geleden een behoorlijk meetkundige kennis bezaten. Uiteraard ontstonden ook in Mesopotamië, India en China (om alleen de belangrijkste culturen uit de oudheid te noemen) vergelijkbare inzichten.



Figuur 1 Rhind-papyrus

Meer over de geschiedenis van de meetkunde.

Testen

Opgave 1

Een plastic koffiebekertje heeft (ongeveer) de vorm van een afgeknotte kegel. Van een bepaald koffiebekertje is de diameter van de bodem 46 mm, die van de bovencirkel 64 mm en de hoogte 90 mm.

Teken een uitslag van dit koffiebekertje. Schrijf alle noodzakelijke berekeningen op.

Opgave 2

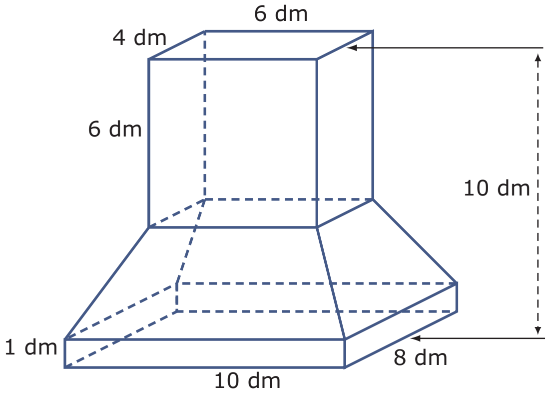
Je ziet een stalen afzuigkap in een keuken. Het bovenste deel is een balk, het onderste gedeelte ook. De vier schuine vlakken hebben allemaal de vorm van een symmetrisch trapezium.

a Teken een vooraanzicht, een zijaanzicht en een bovenaanzicht van de afzuigkap.

b Bereken de hoeken in graden nauwkeurig en bereken exact de lengte van de zijden van de trapezia.

c Is het middelste deel van deze afzuigkap een afgeknotte piramide? Licht je antwoord toe.

d Teken een uitslag op schaal 1 : 20 van de afzuigkap.



Figuur 2

Opgave 3

Bekijk de foto van de toren van de Walfriduskerk in Bedum. Deze toren is ongeveer 35,70 meter hoog en heeft vier gelijke ruitvormige dakdelen. Iemand maakt een papieren model van deze torenspits. Daarbij maakt hij als grondvlak van de toren een vierkant van 6 cm bij 6 cm. De totale hoogte van het bouwsel wordt 36 cm. De vier onderste punten van deze ruiten komen 30 cm boven het grondvlak.

a Teken de drie aanzichten van de torenspits.

b Bereken exact de lengtes van de zijden van zo'n ruitvormig dakdeel. Bereken ook de hoeken daarvan.

c Teken een parallelprojectie van de torenspits met daarin een serie horizontale doorsneden op 2 meter, 4 meter en 6 meter onder de top.


Figuur 3

Opgave 4

Van een regelmatige zeszijdige piramide $T.ABCDEF$ zijn de ribben van het grondvlak 4 cm. De hoogte ervan is TS, waarbij S het middelpunt is van de cirkel die door de hoekpunten van het grondvlak kan worden getrokken.

a Welke lengte heeft ribbe AT minimaal? Licht je antwoord toe.

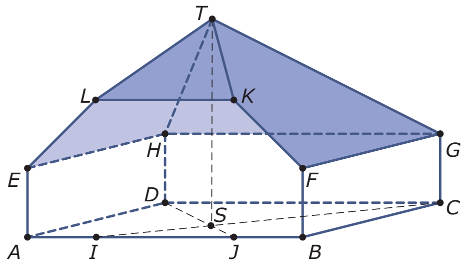
b Gegeven is dat $TS = 6$ cm. Hoe lang is AT?

c Op de helft van de totale hoogte van de piramide wordt een doorsnede gemaakt evenwijdig met het grondvlak. Teken deze doorsnede op ware grootte.

d De punten M, S en N verdelen diagonaal AD in vier gelijke delen. Teken een serie van drie doorsneden evenwijdig aan TS en loodrecht op diagonaal AD door de genoemde punten.

Opgave 5

Bekijk de vereenvoudigde weergave van een boerenschuur. Grondvlak $ABCD$ is een rechthoek met $AB = 8$ m en $BC = 6$ m. De zijvlakken $BCGF$ en $ADHE$ zijn rechthoeken van 6 m bij 2 m. Verder is $AI = BJ = 2$ m, $KL = IJ$ en $TS = 6$ m. Punt L zit recht boven I, punt K zit recht boven J en punt T zit recht boven S. Verder is gegeven dat $KJ = 4$ m.



Figuur 4

a Teken een vooraanzicht, een zijaanzicht en een bovenaanzicht van de schuur.

b Teken het grensvlak $FGTK$ op schaal 1:100 en bereken alle hoeken ervan in graden nauwkeurig.

c Teken in de figuur de doorsnede van een vlak door C, L en K met de schuur.

Toepassen

Opgave 6: De vijf regelmatige lichamen

Al in de Oudheid was bekend dat er precies vijf **regelmatige lichamen** zijn. Dat zijn lichamen waarvan alle ribben en alle vlakken en alle hoeken gelijk zijn. Hier zie je er fraaie animaties van, die zijn gemaakt door **Rüdiger Appel**. Bekijk zijn website maar eens, je vind er deze figuren onder de naam ‘Platonic Solids’ (dat is Engels voor ‘Platonische lichamen’).
Je ziet hier (van links naar rechts) het tetraëder (regelmatig viervlak), de kubus (hexaëder, of regelmatig zesvlak), het octaëder (regelmatig achtvlak), het dodecaëder (regelmatig twaalfvlak) en het icosaëder (regelmatig twintigvlak).

Bekijk de applet.

Figuur 5

Als je hun hoekpunten, hun ribben en hun grensvlakken telt, kom je tot:

aantal grensvlakken + aantal hoekpunten = aantal ribben + 2

Is dat toeval? Of kun je het verklaren?
En waarom zijn er niet meer dan vijf?

a Neem $r = 4$ en teken van het regelmatig viervlak, de kubus en het regelmatig achtvlak een dwarsdoorsnede waar minstens één ribbe een zijde van is en die door de draaias van de figuur gaat. Als je er zin in hebt moet je vooral ook proberen om dit in het regelmatig twaalfvlak en het regelmatig twintigvlak te doen!

b Druk bij het regelmatig viervlak, de kubus en het regelmatig achtvlak de hoogte uit in r.
De andere twee zijn erg moeilijk, een echte uitdaging!

c Kun je verklaren waarom er niet meer dan vijf regelmatige lichamen zijn? (Tip: Denk aan de hoeken die in een hoekpunt bij elkaar komen.)

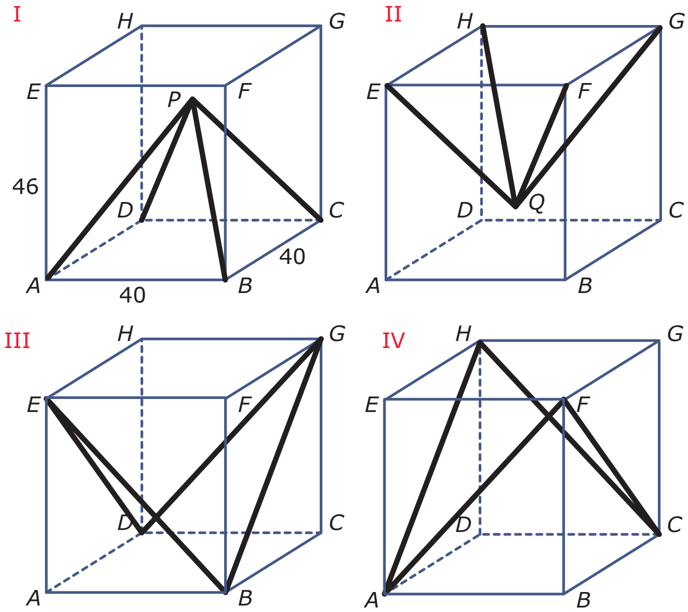
d Probeer een verklaring te vinden voor de formule van Euler:
aantal grensvlakken + aantal hoekpunten = aantal ribben + 2

Examen

Opgave 7: Tafeltje

Op de foto hiernaast staat de afbeelding van een tafeltje. Het tafeltje bestaat uit een aluminium onderstel met daarop een glazen plaat. De vragen gaan over het onderstel. Dit bestaat uit een aantal staven. Uit de foto is moeilijk op te maken hoe het onderstel precies in elkaar zit. De figuur hieronder geeft hierover meer duidelijkheid door het verdelen van de staven over de figuren I, II, III en IV.

Figuur 6



Figuur 7

Het onderstel past in zijn geheel precies in een denkbeeldige balk $ABCD.EFGH$. Als de vier figuren in elkaar worden geschoven, ontstaat een tekening van het volledige onderstel. Bij de punten E, F, G en H van het onderstel kan de glazen plaat worden vastgemaakt.
In de volgende vragen wordt de dikte van de staven verwaarloosd.
De afmetingen van de balk $ABCD.EFGH$ zijn $40 \times 40 \times 46$ cm. Zie de figuren I en II.
Punt P ligt 13 cm onder het midden van het bovenvlak van de balk; punt Q ligt 13 cm boven het midden van het grondvlak.

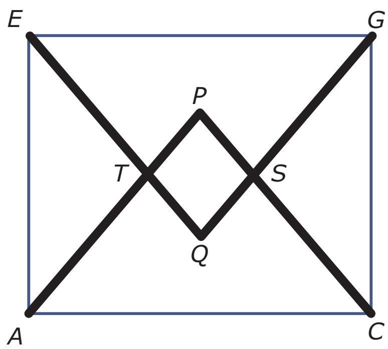
a Teken het bovenaanzicht van het volledige onderstel op schaal 1 : 10. Zet alle letters erbij.

b Bereken de totale lengte aluminium staaf die in het onderstel verwerkt is. Geef je antwoord in gehele centimeters nauwkeurig.

Hiernaast is het diagonaalvlak $ACGE$ getekend met de vier staven die in dit vlak liggen. In het snijpunt S van de lijnen PC en QG zijn in werkelijkheid de twee staven door middel van een pennetje met elkaar verbonden. Om dit mogelijk te maken moest er in iedere staaf een gaatje geboord worden op een bepaalde afstand van de eindpunten.

c Bereken de afstand QS. Geef je antwoord in gehele millimeters nauwkeurig.

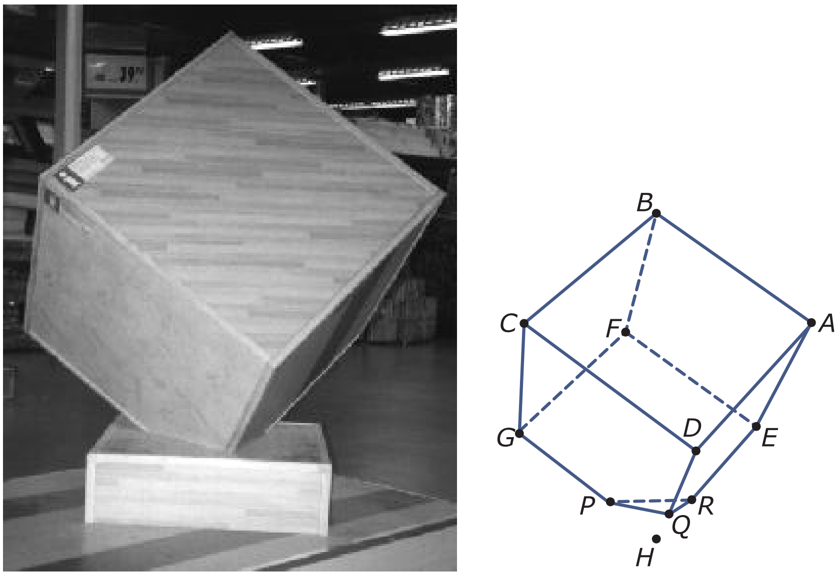
(bron: examen wiskunde B1,2 havo in 2000, opgave 5, tweede tijdvak)



Figuur 8

Opgave 8: Showmodel

In een Doe-Het-Zelf-winkel staat een showmodel om verschillende soorten vloerbedekking te laten zien: parket, laminaat en vinyl. Zie de foto.
Het showmodel is een kubus $ABCD.EFGH$ (met de diagonaal BH verticaal) die bij hoek H is afgeknot. De kubus staat met het afgeknotte gedeelte PQR op een rechthoekig blok, een zogenaamde sokkel. Zo zijn er zes grensvlakken waarop men een vloerbedekking kan laten zien.



Figuur 9

De niet-afgeknotte ribben zijn 100 cm lang; de ribben GP, DQ en ER zijn 80 cm lang.

a Bereken de oppervlakte van dat deel van de afgeknotte kubus dat gebruikt kan worden om vloerbedekking te laten zien.

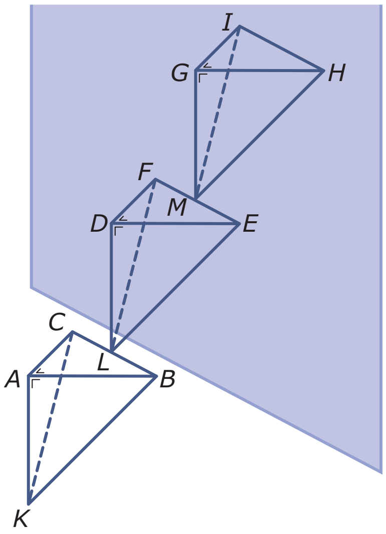
b Teken een bovenaanzicht van de afgeknotte kubus. Zet de letters van de hoekpunten erbij. Teken met stippellijnen de ribben die je van bovenaf niet kunt zien.

c De sokkel heeft een hoogte van 20 cm. Onderzoek door middel van een berekening of de totale hoogte van het showmodel (inclusief sokkel) minder dan 185 cm is.

(bron: examen wiskunde B1,2 havo 2001, opgave 5, aangepast)

Opgave 9: Etagère

In een advertentie van een tuincentrum staat een foto van een etagère. Dezelfde foto is hiernaast afgebeeld. Hieronder is de etagère getekend.



Figuur 11

Figuur 10

De etagère is opgebouwd uit drie gelijke piramiden. Hij steunt met het punt K op de grond en met de ribbe HI tegen de muur. De bovenste piramide is aan de middelste vastgelast in het midden M van ribbe EF en de middelste piramide is aan de onderste vastgelast in het midden L van ribbe BC. Het punt K en de ribben BC, EF en HI liggen in één vlak. De driehoeken KAB, KAC en ABC zijn zowel rechthoekig als gelijkbenig. $KA = AB = AC = 25$ cm. De vlakken ABC, DEF en GHI lopen evenwijdig aan het grondvlak.

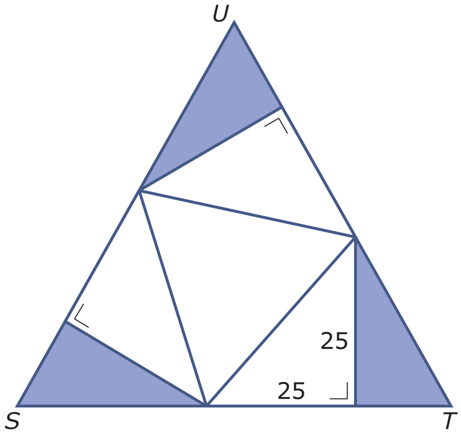
a Teken een bovenaanzicht van deze etagère op schaal 1 : 5. Zet de letters erbij.

b Bereken de afstand van punt K tot de muur. Rond je antwoord af op een geheel aantal centimeters.

De drie piramiden van de etagère worden uit ijzeren platen gemaakt. Zo'n ijzeren plaat heeft de vorm van een gelijkzijdige driehoek STU. Hiernaast is de uitslag van een piramide in de ijzeren plaat getekend. De grijze driehoekjes zijn afval.

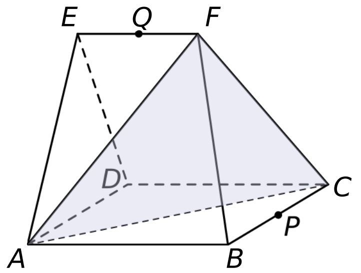
c Bereken de lengtes van de zijden van driehoek STU. Rond je antwoord af op een geheel aantal centimeters.

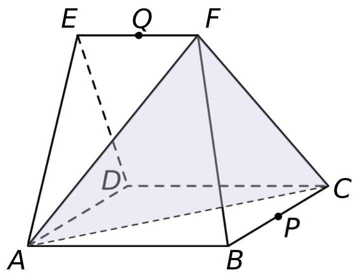
(bron: herexamen wiskunde B1,2 havo 2004, opgave 3, aangepast)



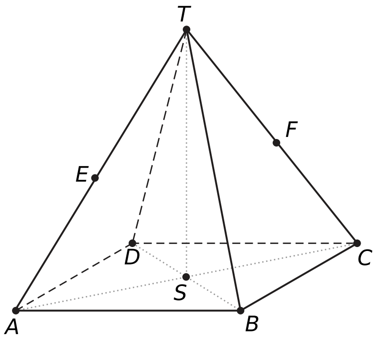
Figuur 12

Werkblad bij

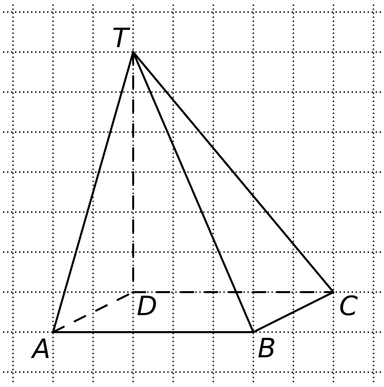




Werkblad bij



Werkblad bij



Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.