1.4 Doorsneden

Inleiding

Om lengtes en hoeken te berekenen werk je in één vlak. Zo'n vlak doorsnijdt de ruimtelijke figuur. De vlakke figuur die wordt gevormd door de snijlijnen noem je een doorsnede. Als je er lengtes en hoeken in wilt berekenen, construeer je die doorsnede met de ware vorm en grootte. Je krijgt dan een goed idee hoe de figuur er in werkelijkheid uitziet. Je kunt deze tekeningen uiteraard ook op schaal maken, als in de figuur maar de juiste verhoudingen worden weergegeven.

Je leert in dit onderwerp

- de doorsnede van een ruimtelijke figuur met een vlak herkennen;
- doorsneden uit een ruimtelijke figuur halen en in de werkelijke vorm tekenen;
- doorsneden in een ruimtelijke figuur tekenen.

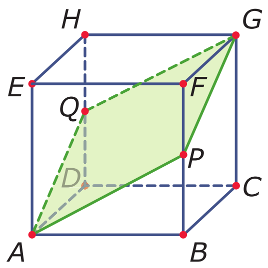
Voorkennis

- driehoeken construeren;
- lengtes van zijden en de grootte van hoeken berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de doorsnede $APGQ$ getekend in een kubus met ribben van 5 cm. P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen.



Figuur 1

a Kun je uitleggen waarom dit de doorsnede van de kubus met een plat vlak is? Weet je zeker dat het een vlakke figuur is? En zo ja, waarom?

b Vanuit welke richting moet je de kubus bekijken om $APGQ$ als een lijnstuk te zien?

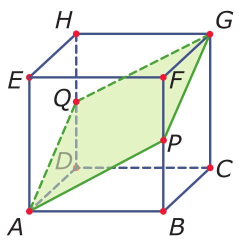
c Welke vlakke figuur is doorsnede $APGQ$?

d Bereken de zijden en de hoeken van die figuur.

e Bereken de oppervlakte van die figuur.

Uitleg

Bekijk de doorsnede $APGQ$ getekend in een kubus met ribben van 5 cm. P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen.



Figuur 2

Je kunt (in gedachten) de figuur zo draaien dat je de punten A, G, P en Q op één lijn ziet liggen. En daarom weet je zeker dat ze in één vlak liggen. Je kunt het ook zo zien: de snijlijnen in twee overstaande evenwijdige grensvlakken van de kubus (bijvoorbeeld AP en QG) zijn evenwijdig en dus is $APGQ$ een plat vlak.

Als je $APGQ$ op ware grootte wilt zien, moet je de kubus zo draaien dat je er loodrecht op kijkt. Dit is het geval als (bijvoorbeeld) punt E recht boven het midden van grondvlak $ABCD$ ligt. Dat kun je aantonen door rechthoek $ACGE$ op ware grootte te tekenen en te laten zien dat EM loodrecht staat op AG als M het midden van AC is.

Je ziet nu dat $APGQ$ een ruit is met zijden van $\sqrt{5^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{31{,}25}$ cm en een diagonaal PQ van $\sqrt{50}$ cm. Je tekent hem zelf op ware grootte door eerst PQ te tekenen en dan de zijden vanuit P en Q te omcirkelen.

Opgave 1

Bekijk kubus $ABCD.EFGH$ in de **Uitleg**. M is het midden van AC.

a Waarom zijn de twee ribben AP en QG evenwijdig?

b Teken diagonaalvlak $ACGE$ op ware grootte en laat zien dat AG en EM loodrecht op elkaar staan.

c Waarom zie je $APGQ$ op ware grootte als je in de richting EM op dat vlak kijkt?

d Bereken zelf de lengte van de twee diagonalen van ruit $APGQ$.

e Teken de ruit op ware grootte en bereken de hoeken ervan in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 2

Gegeven is een kubus $ABCD.EFGH$. P is het midden van BF. Teken zelf die kubus als een schets. Door A, P en H gaat een vlak. Dat vlak kun je binnen de kubus nog groter maken.

a Licht toe waarom het midden R van FG ook in dit vlak ligt. Denk aan evenwijdigheid!

b Teken vierhoek $APRH$ in de kubus.

c Leg uit dat alle punten van het vlak door A, P en H die binnen de kubus liggen binnen, of op vierhoek $APRH$ liggen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

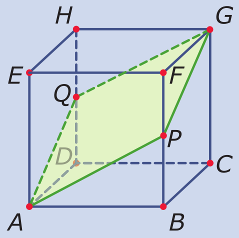
Een **doorsnede** van een ruimtelijke figuur is de figuur die wordt gevormd door alle snijlijnen van de ruimtelijke figuur met een vlak. (Een vlak is plat.)

Moet je zelf een doorsnede tekenen, dan maak je gebruik van de volgende eigenschappen:

- Als een vlak twee (of meer) evenwijdige vlakken snijdt, dan zijn de snijlijnen evenwijdig.
- Door twee verschillende evenwijdige lijnen bestaat één vlak.
- Als twee lijnen evenwijdig zijn, liggen alle lijnen, die een punt van de ene lijn verbinden met een punt van de andere lijn, in het vlak waarin de twee evenwijdige lijnen liggen.
- Door een lijn en een punt niet op die lijn bestaat één vlak.
- Als er een lijn en een punt niet op die lijn gegeven zijn, liggen alle lijnen, die het punt en een punt van de lijn verbinden, in het vlak door het punt en de lijn.

Bekijk de kubus. P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen. Er is een vierhoek $APGQ$ in de kubus getekend.

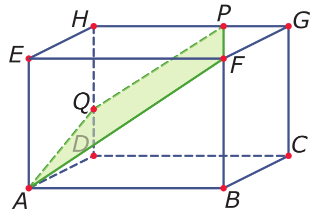
Deze vierhoek is een doorsnede van de kubus, want de vier zijden (snijlijnen van de vierhoek met de kubus) van de vierhoek liggen in één vlak. Immers: AP en QG zijn evenwijdig, want ze liggen in evenwijdige vlakken en hebben in die vlakken dezelfde helling. Er is dus één vlak door beide lijnstukken. De andere twee lijnstukken verbinden punten op AP en QG, dus alle zijden liggen in één vlak.



Figuur 3

Om in de doorsnede berekeningen te kunnen uitvoeren, teken je de doorsnede op ware grootte of op schaal. Daarmee wordt bedoeld dat alle hoeken hun werkelijke grootte hebben en alle zijden hun werkelijke lengte of lengte op schaal. Teken hulpfiguren waarvan je de afmetingen al kent om onbekende lengtes en hoeken te vinden.

Voorbeeld 1



Figuur 4

Bekijk doorsnede $AFPQ$ van een plat vlak met een balk $ABCD.EFGH$.
Gegeven is $AB = 6$, $BC = 4$, $CG = 3$ en $GP = 2$.
Teken doorsnede $AFPQ$ op ware grootte.

Antwoord

De ware lengte van AF kun je halen uit rechthoek $ABFE$: $AF = \sqrt{45}$.

De ware lengte van FP kun je halen uit rechthoekige ΔFGP: $FP = \sqrt{20}$.

De ware lengte van AP kun je halen uit rechthoekige ΔAHP: $AP = \sqrt{41}$. Nu teken je eerst ΔAFP met behulp van passer en lineaal.

Omdat $AFPQ$ een plat vlak is, moet $AF//PQ$. Dus zijn de driehoeken AFE en QPH gelijkvormig.

Omdat $PH = \frac{4}{6}EF$ is ook $PQ = \frac{4}{6}AF$.

Hiermee kun je het trapezium $AFPQ$ afmaken.

Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 1** de doorsnede $AFPQ$ van een plat vlak met een balk $ABCD.EFGH$.

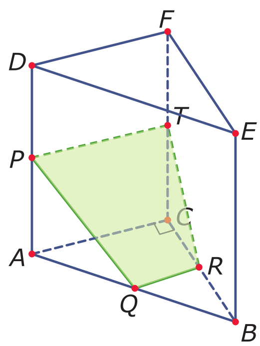
a Laat zien hoe de lengtes van de zijden van vierhoek $AFPQ$ kunnen worden berekend.

b Bereken zelf de lengte van de diagonalen van vierhoek $AFPQ$.

c Waarom weet je zeker dat vierhoek $AFPQ$ een trapezium is?

d Teken nu dit trapezium op ware grootte.

Voorbeeld 2



Figuur 5

In het rechte prisma $ABC.DEF$ ligt P op het midden van AD, Q op het midden van AB, R op het midden van BC en T op het midden van CF. Hoek BCA is recht, $BC = BE = 4$ en $AC = 3$.
Teken doorsnede $PQRT$ op ware grootte.

Antwoord

Van vierhoek $PQRT$ zijn hoek PTR en hoek TRQ recht. Verder is $TP = 3$, $TR = \sqrt{8}$ en $QR = 1{,}5$ (gelijkvormigheid). De figuur is nu eenvoudig te tekenen.
Ga na hoe je de hoeken en de oppervlakte van trapezium $PQRT$ berekent.

Opgave 4

Bekijk het rechte prisma $ABC.DEF$ in **Voorbeeld 2**.

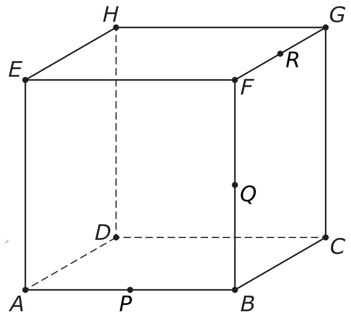
a Teken zelf de doorsnede $PQRT$ op ware grootte. Controleer alle berekende lengtes.

b Bereken de hoeken en de oppervlakte van het trapezium.

Voorbeeld 3

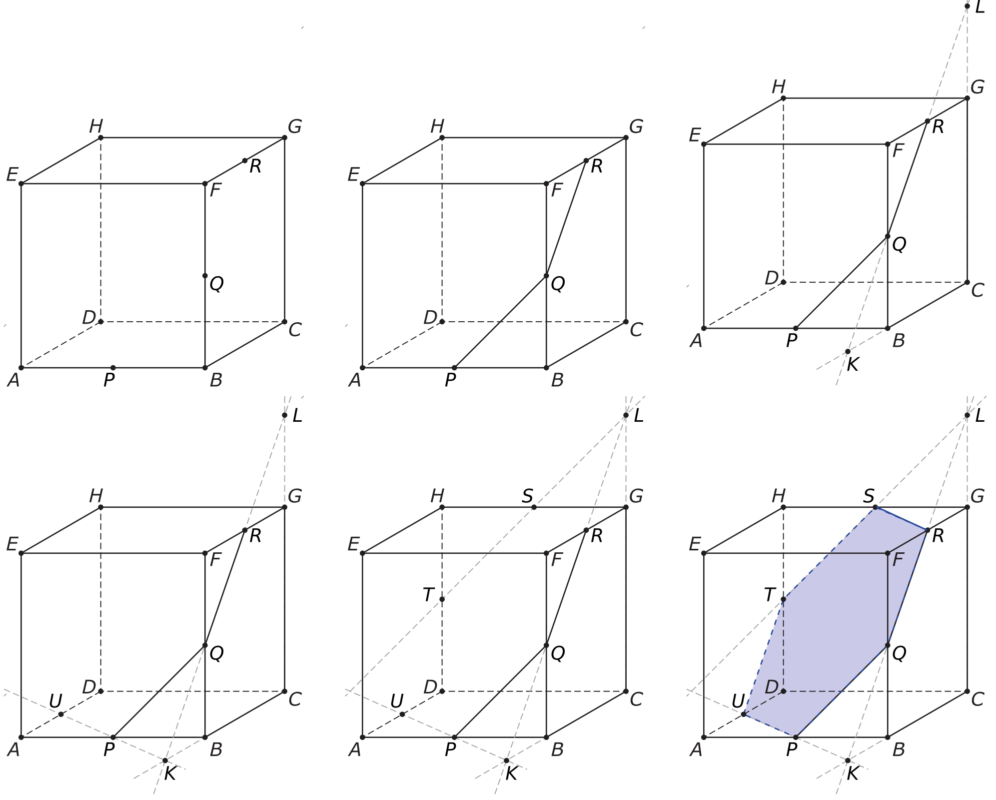
Een kubus $ABCD.EFGH$ heeft ribben van 8 cm. P is het midden van AB, Q dat van BF en R dat van FG.

1. Teken de doorsnede van het vlak door deze drie punten met de kubus.
2. Teken die doorsnede ook op ware grootte en bereken de oppervlakte ervan.



Figuur 6

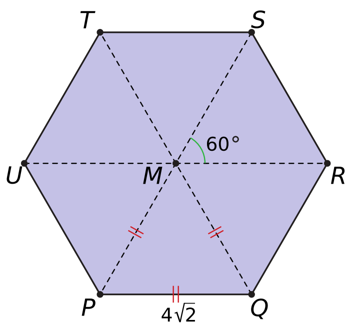
Antwoord



Figuur 7

- Bij het tekenen van de lijn door L die de punten S en T oplevert, is gebruikgemaakt van de evenwijdigheid van de snijlijnen in twee evenwijdige vlakken. Je krijgt een regelmatige zeshoek $PQRSTU$ met alle zijden $4\sqrt{2}$.
- Zeshoek $PQRSTU$ bestaat uit zes gelijkzijdige driehoeken, want de hoeken bij punt M zijn allemaal 60°.
  Een gelijkbenige driehoek met een tophoek van 60° is gelijkzijdig.
  De hoogte van één van die gelijkzijdige driehoeken is te berekenen met behulp van de stelling van Pythagoras. En daarmee bereken je de oppervlakte van zo'n driehoek.

  Ga na dat de zeshoek een oppervlakte heeft van $48\sqrt{3}$ cm^2.



Figuur 8

Opgave 5

Bekijk de kubus $ABCD.EFGH$ met de punten P, Q en R in **Voorbeeld 3**.

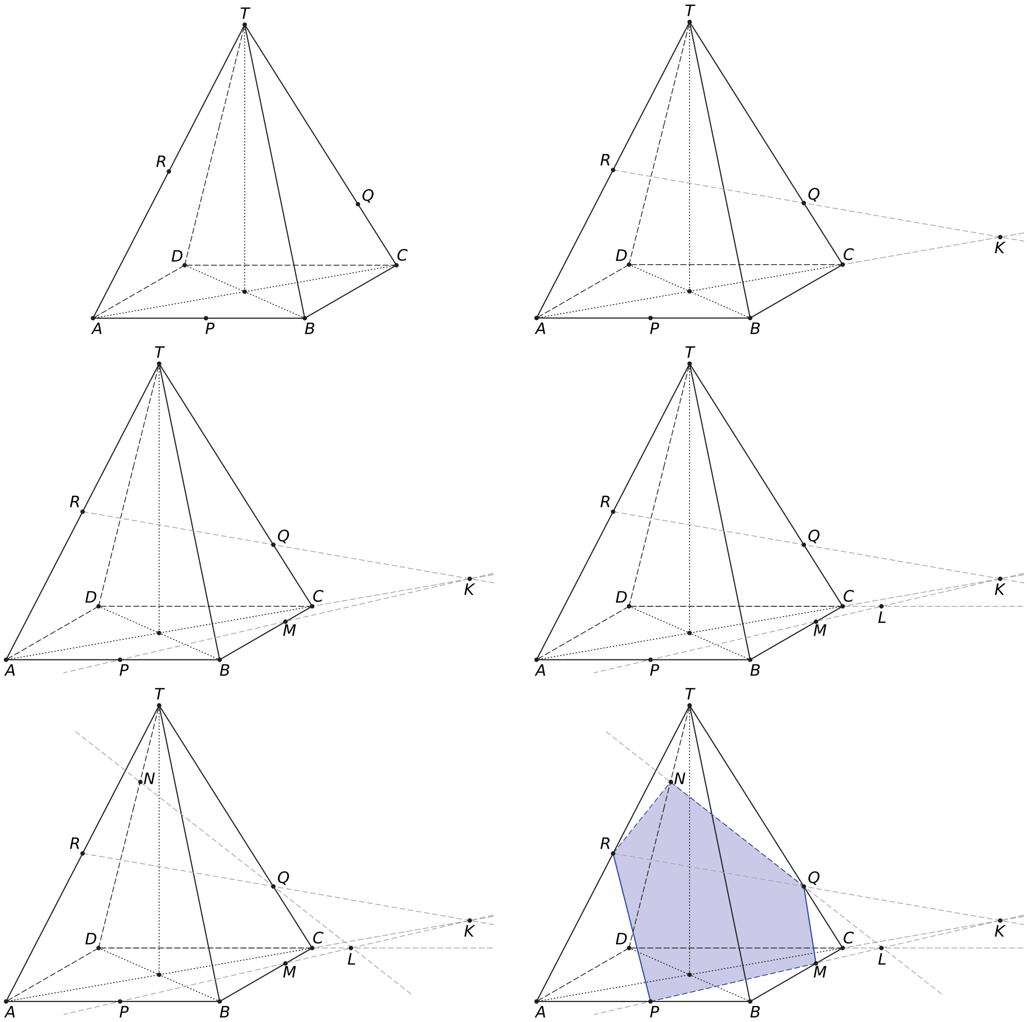
a Teken zo'n kubus met de punten P, Q en R. Voer daarna zelf de constructie van de doorsnede door deze punten stap voor stap uit. Leg bij elke stap uit hoe en waarom hij wordt gezet.

b Toon aan dat de oppervlakte van de doorsnede inderdaad $48\sqrt{3}$ cm^2 is.

c Teken de kubus nog eens. Het midden van GH is punt S, het midden van BF is punt Q. Teken de doorsnede van het vlak door E, Q en S met de kubus. Geef ook nu een uitgebreide beschrijving van je constructie.

Voorbeeld 4

Bekijk de constructie van de doorsnede van het vlak door P, Q en R met de piramide $T.ABCD$.



Figuur 9

Opgave 6

In **Voorbeeld 4** wordt de doorsnede van het vlak door P, Q en R in een gegeven regelmatige vierzijdige piramide geconstrueerd wordt.

a Waarom weet je zeker dat de lijnen RQ en AC elkaar snijden? Waarom ligt dit snijpunt K in het grondvlak $ABCD$ van de piramide?

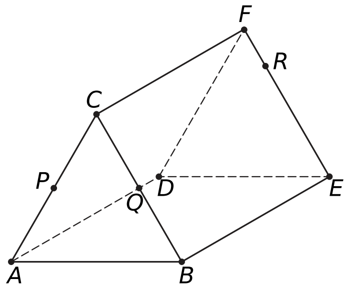
b Geef een nauwkeurige beschrijving van de constructie.

c Teken zelf deze piramide en daarin de doorsnede van het vlak door R, B en Q.

Verwerken

Opgave 7

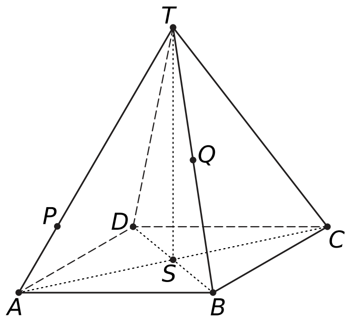
Neem het regelmatige driezijdige prisma $ABC.DEF$ over en teken de doorsnede van het vlak door P, Q en R. Punt Q is het midden van BC. Geef een beschrijving van de constructie.



Figuur 10

Opgave 8

Neem de piramide over en teken de doorsnede van het vlak door P, Q en C en de regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$. Geef een beschrijving van de constructie.



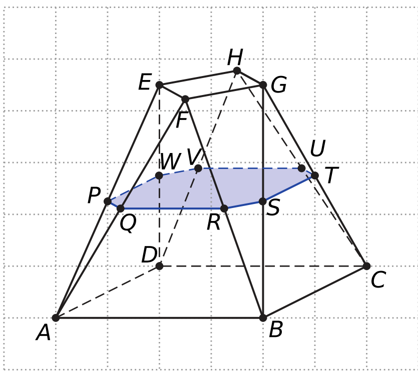
Figuur 11

Opgave 9

Van de achtkanter $ABCD.EFGH$ is het grondvlak $ABCD$ een vierkant van 4 bij 4, de hoogte 4 en het bovenvlak $EFGH$ een vierkant met diagonalen van 2 eenheden. In deze achtkanter is een horizontale doorsnede getekend door het midden van alle opstaande ribben.

a Teken deze doorsnede op ware grootte. Laat zien hoe je daarbij te werk gaat.

b Bereken de totale omtrek van deze doorsnede.



Figuur 12

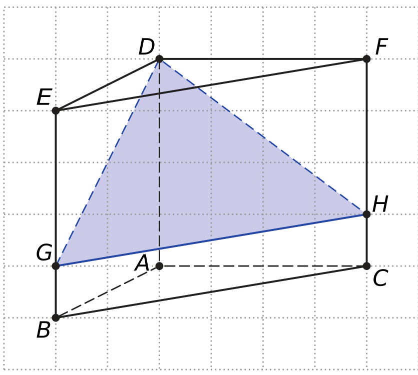
Opgave 10

Bekijk prisma $ABC.DEF$ waarvan twee grensvlakken vierkant zijn. Deze vierkanten hebben zijden van 4 cm. Verder is gegeven: $\angle BAC = 90°$, $BG = 1$ en $CH = 1$.

a Teken de doorsnede van vlak GHD en het prisma op ware grootte.

b Bereken de grootte van de hoeken van driehoek GHD in één decimaal nauwkeurig.

c Neem de figuur over en teken de snijlijn van vlak GHD met het vlak waarop het grondvlak ABC ligt.

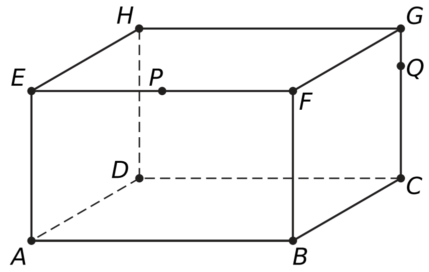


Figuur 13

Opgave 11

In deze balk $ABCD.EFGH$ is P het midden van EF en ligt Q op CG zo, dat $CQ : QG = 4 : 1$.

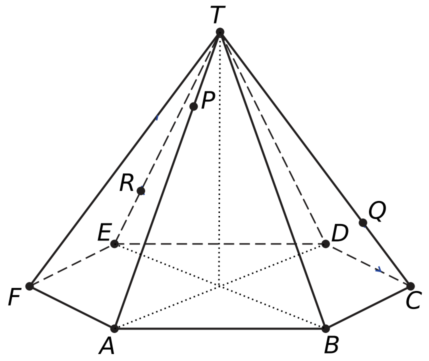
Neem de balk over en teken de doorsnede van het vlak APQ en de balk. Geef een beschrijving van de constructie.



Figuur 14

Opgave 12

Gegeven is een piramide $ABCDEF.T$ met een regelmatige zeshoek als grondvlak. Zie ook de figuur. Punt P ligt op AT, punt Q ligt op TC en punt R op TE. Teken de doorsnede door de punten P, Q en R. Licht je antwoord toe.

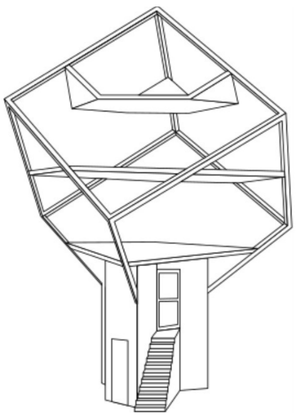


Figuur 15

Toepassen

Opgave 13: Kubuswoningen

Het ontwerp van de kubuswoningen door architect Piet Blom is beroemd. In Helmond en in Rotterdam zijn dergelijke kubuswoningen gebouwd.



Figuur 16

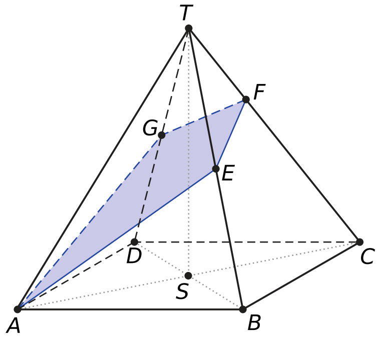
a Teken zo'n kubus die op zijn punt staat: één van de lichaamsdiagonalen is verticaal.

b Teken de vloeren van de drie verdiepingen in de kubus. Deze drie vloeren verdelen de verticale lichaamsdiagonaal in vier gelijke delen.

Testen

Opgave 14

Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is het grondvlak $ABCD$ een vierkant met zijden van 4 cm. De hoogte van deze piramide is 5 cm. Punt E is het midden van BT en punt G is het midden van DT. De doorsnede $AEFG$ heeft de vorm van een vlieger. S is het snijpunt van de diagonalen AC en BD. M is het snijpunt van TS en GE.



Figuur 17

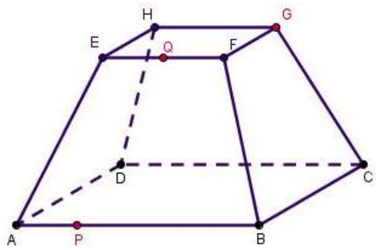
a Leg uit waarom deze doorsnede de vorm van een vlieger heeft.

b Teken doorsnede $AEFG$ op ware grootte. Licht je antwoord met berekeningen toe.

c Bereken de grootte van $\angle EAG$.

Opgave 15

In GeoGebra is een afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.EFGH$ getekend. P ligt zo op AB dat $AP : PB = 1 : 3$ en Q is het midden van EF.



Figuur 18

Teken de doorsnede van het vlak PQG en de afgeknotte piramide. Geef een beschrijving van de constructie.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.