# 1.2 Berekeningen

## Inleiding

Ruimtelijke figuren geven vaak aanleiding tot het berekenen van afstanden, lengtes van lijnstukken en grootte van hoeken. Je hebt al gezien dat als je een lichaam tekent in parallelprojectie de vorm en lengte van de figuren nogal eens kunnen afwijken van de werkelijke vorm en/of grootte. Bij het berekenen van de lengte van een lijnstuk of de grootte van een hoek is het daarom vaak handig om de figuur als vlakke figuur in de 'juiste' vorm te tekenen. Maak in ieder geval altijd een schets!

**Je leert in dit onderwerp**

- berekeningen uitvoeren bij ruimtefiguren met de stelling van Pythagoras;
- berekeningen uitvoeren bij ruimtefiguren met behulp van sinus, cosinus en tangens;
- gebruikmaken van gelijkvormigheid en de vergrotingsfactor van vlakke figuren die onderdeel zijn van ruimtefiguren.

**Voorkennis**

- de (omgekeerde) stelling van Pythagoras;
- zijden en hoeken berekenen in rechthoekige driehoeken met de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens;
- de oppervlakte berekenen van driehoeken;
- gelijkvormigheid gebruiken bij het berekeningen in vlakke figuren.

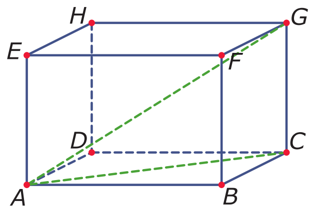
## Verkennen

### Opgave V1

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$. Gegeven is dat $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm en $AE = 2$ cm.

**a** Hoe groot zijn de lijnstukken $AC$ en $AG$?

**b** Hoe groot is $\angle CAG$ (de hoek bij $A$ met benen $AC$ en $AG$)?



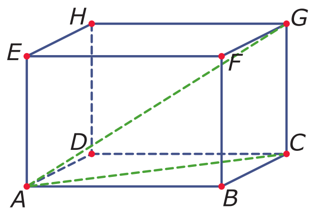

**Figuur 1**

## Uitleg

Bekijk de balk $ABCD.EFGH$. Gegeven is dat $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm en $AE = 2$ cm.

Om zijvlaksdiagonaal $AC$ te berekenen, merk je op dat $\Delta ABC$ rechthoekig is. In deze driehoek kun je de stelling van Pythagoras toepassen: $AB^2 + BC^2 = AC^2$.
Dus is: $AC^2 = 5^2 + 3^2$.

Zo vind je: $AC = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$.




**Figuur 2**

Lichaamsdiagonaal $AG$ reken je op dezelfde wijze uit. Nu is $\Delta ACG$ de rechthoekige driehoek waarin je de stelling van Pythagoras toepast: $AC^2 + CG^2 = AG^2$.
Dus is: $AG^2 = 34 + 2^2$.

Zo vind je: $AG = \sqrt{\left(\sqrt{34}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$.

Een hoek als $\angle CAG$ (hoekpunt $A$ en benen $AC$ en $AG$) bereken je met behulp van sinus, cosinus of tangens in een rechthoekige driehoek.

Neem daarvoor $\Delta ACG$, dan is bijvoorbeeld $\tan(\angle CAG) = \frac{2}{\sqrt{34}}$.

Dus is $\angle CAG \approx 19°$.

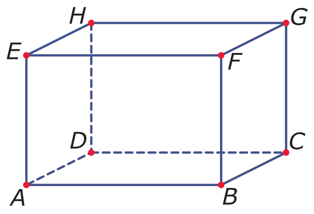
## Opgave 1

Bekijk de balk $ABCD.EFGH$.

**a** Welke vorm heeft vlak $AFGD$ in werkelijkheid?

**b** Bereken de lengte van zijvlaksdiagonaal $AF$.

**c** Bereken de grootte van $\angle AGF$ in graden nauwkeurig.




Figuur 3

## Opgave 2

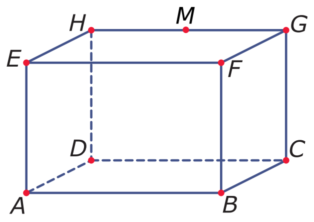
Bekijk de balk $ABCD.EFGH$.
Gegeven is dat $AB = 6, BC = 4$ en $AE = 3$. Punt $M$ is het midden van ribbe $HG$.

**a** Bereken de lengte van $AM$ en $BM$.

**b** Bereken de grootte van $\angle AMH$ in graden nauwkeurig.

**c** Bereken de grootte van $\angle AMD$ in graden nauwkeurig.

**d** Bereken de grootte van $\angle AMB$ in graden nauwkeurig.




Figuur 4

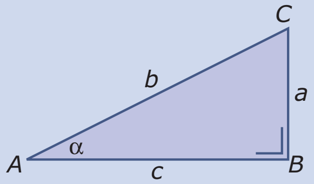
# Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Voor het berekenen van de lengte van lijnstukken en de grootte van hoeken zoek je in de ruimtefiguur geschikte vlakke figuren. Teken deze vlakke figuren (eventueel op ware grootte). Zet de gegevens erbij en bereken de gevraagde lengte en/of grootte.

Meestal zoek je geschikte **rechthoekige driehoeken**, want daarin gelden:

- De **stelling van Pythagoras**: $c^2 + a^2 = b^2$.
- De **goniometrische verhoudingen**:
  - $\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$
  - $\cos(\alpha) = \frac{c}{b}$
  - $\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$



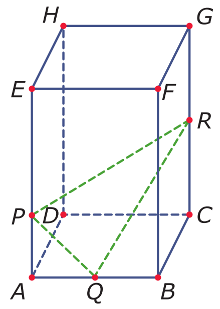

Figuur 5

Merk op dat in dit geval $b$ de schuine zijde (hypothenusa) is, $a$ de voor hoek $\alpha$ overstaande rechthoekszijde en $c$ de voor hoek $\alpha$ aanliggende rechthoekszijde is.

Verder maak je vaak gebruik van **gelijkvormigheid**. Twee figuren zijn gelijkvormig als hun overeenkomende paren hoeken gelijk zijn en de lengtes van de overeenkomende paren zijden recht evenredig met elkaar zijn. Alle lengtes van de zijden van de ene figuur kunnen dan door vermenigvuldiging met een vaste **vergrotingsfactor** uit de lengtes van de zijden van de andere figuur worden berekend.

## Voorbeeld 1

Bekijk de balk $ABCD.EFGH$ van 4 bij 4 bij 6. Punt $P$ ligt op $AE$ zodat $AP = 2$, $Q$ ligt op het midden van $AB$ en $R$ ligt op het midden van $CG$.
Bereken exact de lengte van $PQ$, van $QR$ en van $PR$.



Figuur 6

Antwoord

Je zoekt geschikte driehoeken of rechthoeken om in te rekenen. Teken waar nodig deze figuren zelf in de juiste vorm.

- In de rechthoekige $\Delta AQP$ geldt: $PQ = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
- In de rechthoekige $\Delta BCR$ geldt: $BR = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

  En in de rechthoekige $\Delta QBR$ geldt dan: $QR = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.

  Tip: deze berekening kan ook sneller $QR = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.
- In de rechthoek $ACGE$ is $AC = \sqrt{32}$ en dus $PR = \sqrt{32 + 1^2} = \sqrt{33}$.

## Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

**a** Bereken de lengte van $AC$ en $AG$.

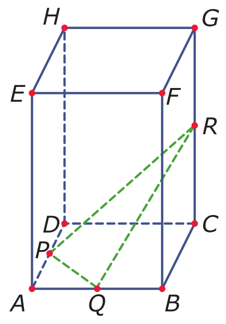
**b** Laat zien, hoe je $AG$ met de uitgebreide stelling van Pythagoras kunt berekenen.

**c** Laat zien, dat $\Delta PQR$ niet rechthoekig is.

**d** Bereken de lengte van $PG$.

## Voorbeeld 2

Bekijk de balk $ABCD.EFGH$ van 4 bij 4 bij 6. Punt $P$ ligt op het midden van $AD$, $Q$ ligt op het midden van $AB$ en $R$ ligt op het midden van $CG$.
Bereken de grootte van de hoeken $RQC$ en $PRQ$ in graden nauwkeurig.



Figuur 7

Antwoord

Je zoekt geschikte driehoeken of rechthoeken om in te rekenen. Teken waar nodig deze figuren zelf in de juiste vorm.

- Voor hoek $RQC$ kijk je naar de rechthoekige $\Delta RQC$, waarvan $QC = \sqrt{20}$ en $CR = 3$.

  Je ziet dat $\tan(\angle RQC) = \frac{3}{\sqrt{20}}$ en dus is $\angle RQC \approx 34°$.
- Hoek $PRQ$ bereken je in de gelijkbenige $\Delta PQR$, waarvan $PR = QR = \sqrt{29}$ en $PQ = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, met behulp van een hoogtelijn $RS$.

  Dan is: $\sin(\angle PRS) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{29}}$. Ga na dat $\angle PRQ \approx 30°$.

## Opgave 4

Gebruik de balk met de punten $P$ en $Q$ uit **Voorbeeld 2**.

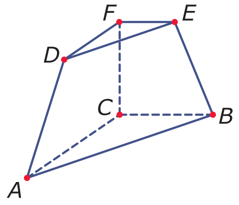
**a** Bereken de grootte van $\angle AFD$.

**b** Bereken de grootte van $\angle QAC$.

**c** Welk probleem doet zich voor als je $\angle HPQ$ zou willen berekenen?

## Voorbeeld 3

Bekijk de afgeknotte piramide $ABC.DEF$. Het grondvlak $\Delta ABC$ is rechthoekig met een rechte hoek bij hoekpunt $C$. De ribbe $CF$ staat loodrecht op het grondvlak $ABC$ en het bovenvlak $DEF$. $AC = 4$ en $BC = CF = DF = 3$.
Bereken de lengte van ribbe $CT$ van de oorspronkelijke piramide $ABC.T$.




Figuur 8

Antwoord

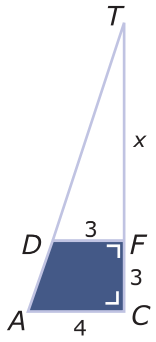
Schets $\Delta ACT$ met daarin lijnstuk $DF$. Omdat $CF$ loodrecht op zowel $AC$ als $DF$ staat, is $AC//DF$ en hebben de driehoeken $ACT$ en $DFT$ gelijke hoeken. Beide driehoeken zijn gelijkvormig.

Omdat $DF = \frac{3}{4}AC$ is ook $TF = \frac{3}{4}TC$.

Noem je $TF = x$, dan is $TC = x + 3$.

En dus is $x = \frac{3}{4}(x + 3)$. Hieruit volgt $x = 9$.

En dus is $CT = 12$.




Figuur 9

### Opgave 5

Bekijk de afgeknotte piramide in **Voorbeeld 3**.

**a** Laat zien, dat $CT = 12$.

**b** Bereken de lengte van $EF$.

**c** Bereken de grootte van $\angle CBE$.

### Opgave 6

Van een driehoekig prisma $ABC.DEF$ is het grondvlak $ABC$ een gelijkzijdige driehoek met zijden van 4. De hoogte $AD$ van het prisma is ook 4. $P$ is het midden van $DE$, $Q$ is het midden van $EF$.

**a** Bereken de lengte van de zijden van $\Delta BPQ$.

**b** Bereken de grootte van de hoeken van deze driehoek.

## Verwerken

### Opgave 7

Gegeven is een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = BC = 4$ cm en $AE = 6$ cm. Punt $P$ is het midden van $GH$. Maak een schets en bereken exact de lengte van de zijden van $\Delta ABP$ en de hoeken van $\Delta ABP$.

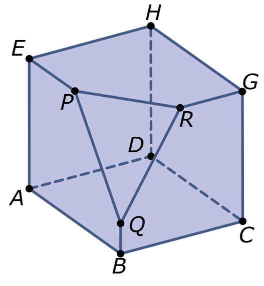
### Opgave 8

Bekijk de afgeknotte kubus met ribben van 6 cm. De punten $P$ en $R$ zijn de middens van de ribben waar ze op liggen. $BQ = 1$ cm.

**a** Bereken de lengtes van de zijden van $\Delta PQR$.

**b** Teken $\Delta PQR$ op ware grootte en bereken de hoeken van deze driehoek in graden nauwkeurig.

**c** Het diagonaalvlak $DBQSH$ is een vijfhoek. Teken dit diagonaalvlak van de afgeknotte kubus op ware grootte en bereken de hoeken ervan in graden nauwkeurig.




Figuur 10

## Opgave 9

Gegeven is een regelmatige piramide $T.ABCD$ waarvan het vierkant $ABCD$ het grondvlak is. Alle ribben van deze piramide zijn 6 cm. $P$ is het midden van $AT$ en $Q$ is het midden van $DT$. Het snijpunt van $AC$ en $BD$ is $S$.

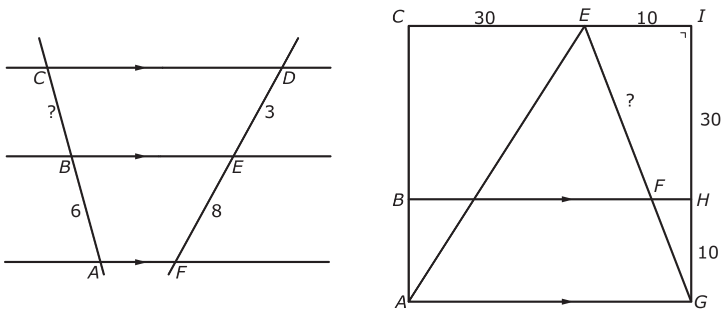
**a** Bereken de hoogte $TS$ van deze piramide.

**b** Leg uit waarom vierhoek $BCQP$ een gelijkbenig trapezium is en bereken de lengtes van de zijden van deze vierhoek. Maak eerst een schets van de situatie.

**c** Teken $BCQP$ op ware grootte en bereken alle hoeken van dit trapezium in één decimaal nauwkeurig.

## Opgave 10

Bekijk de twee vlakke figuren. Er geldt: $\angle G = 90°$.

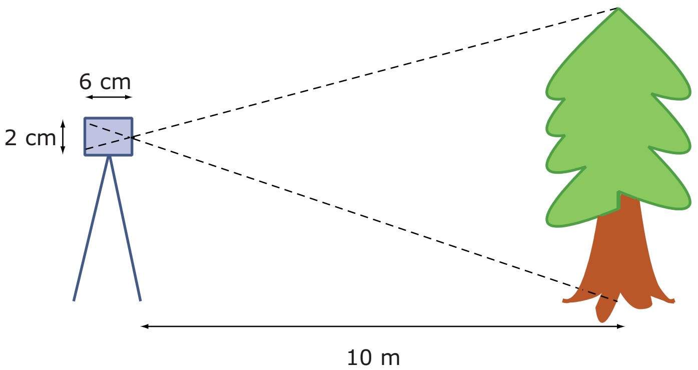



**Figuur 11**

Bereken steeds exact de lengte van het lijnstuk waar het vraagteken bij staat.

## Opgave 11

Marianne is een paar dagen in New York. Ze maakt een foto van een boom. Ze staat 10 meter van de boom vandaan. Op de foto is de boom 2 cm groot. De afstand van de lens tot het negatief in het fototoestel is 6 cm.



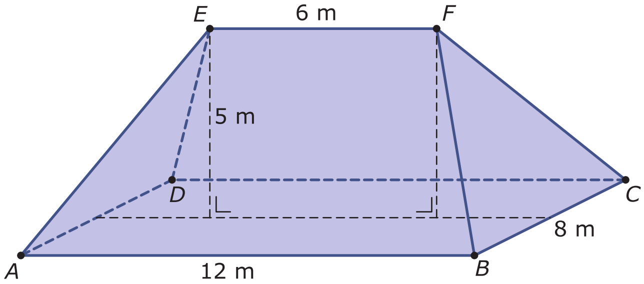

**Figuur 12**

**a** Bereken in cm nauwkeurig hoe hoog de boom is.

**b** Na het ontwikkelen van de foto blijkt het vrijheidsbeeld ook op de foto te staan. Toevallig is op de foto het vrijheidsbeeld precies even groot als de boom. Het vrijheidsbeeld is 93 m hoog. Hoe ver stond Marianne van het vrijheidsbeeld vandaan?

### Opgave 12

Bekijk het schilddak, een dakvorm met een rechthoekig grondvlak $ABCD$ waarbij de nok $EF$ van het dak precies boven het midden van het grondvlak zit. Het dak zelf bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken en twee symmetrische trapezia.




**Figuur 13**

**a** Bereken de lengte van de ribben $AE$, $DE$, $BF$ en $CF$.

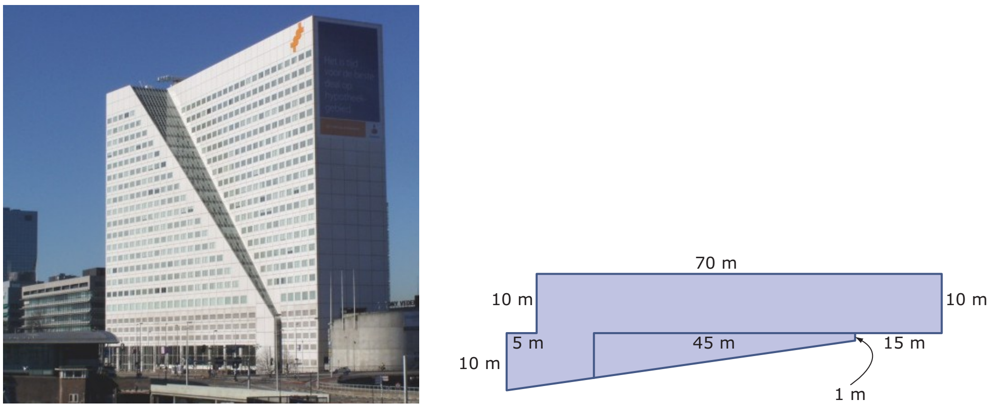
**b** Bereken de grootte van $\angle ABF$ en $\angle BCF$.

**c** Op 3 meter boven de zoldervloer $ABCD$ wordt een rechthoekige verdiepingsvloer aangebracht. Bereken de oppervlakte van die verdiepingsvloer.

## Toepassen

### Opgave 13: Willemswerf (II)

Hier zie je een foto van het gebouw ‘Willemswerf’ in Rotterdam. Daarnaast zie je een bovenaanzicht van een sterk vereenvoudigde versie ervan. Deze sterk vereenvoudigde versie is 80 m hoog. De knik in het gebouw begint op 10 m boven het grondvlak. De knik in het gebouw heeft een grensvlak in de vorm van een trapezium.




**Figuur 14**

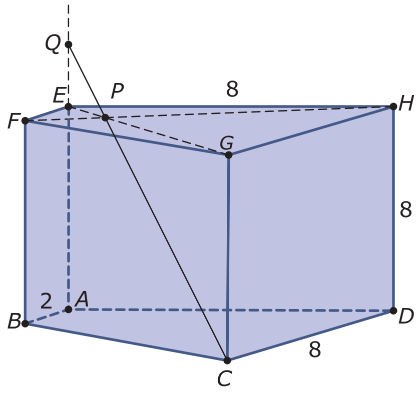
**a** Bereken de lengtes van de zijden van dat trapezium.

**b** Bereken de grootte van de hoeken van dat trapezium.

### Opgave 14: Afgeknotte kubus

Bekijk de aan de voorkant afgeknotte kubus $ABCD.EFGH$. $\angle BAD = \angle ADC = 90°$. De afmetingen staan in de figuur.

Bereken de lengte van $AQ$.




Figuur 15

## Testen

### Opgave 15

Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is het grondvlak $ABCD$ een vierkant met zijde 4. $S$ is het snijpunt van de diagonalen $AC$ en $BD$ en $TS = 10$. Punt $M$ is het midden van $TS$.

**a** Teken deze piramide in parallelprojectie. Teken een lijn door $M$ evenwijdig aan $BD$. Noem de snijpunten met $TB$ en $TD$ respectievelijk $P$ en $Q$.

**b** Bereken de lengte van $AP$ en $PQ$.

**c** Teken $\Delta APQ$ op ware grootte en bereken de hoeken van deze driehoek in graden nauwkeurig.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.