

6.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp ‘Verschillen en verbanden’ doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...

Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- begrip hypothese toetsen — nulhypothese — alternatieve hypothese — fout van de eerste soort — kritieke gebied
- binomiale toets — significantieniveau — eenzijdig en tweezijdig toetsen
- normale toetsing van het gemiddelde
- tekentoets — normale verschiltoets
- puntenwolk, spreidingsdiagram — correlatiecoëfficiënt — trendlijn, regressielijn

Activiteitenlijst

- bij hypothese toetsen de kans op een fout van de eerste soort bepalen
- een binomiale toets uitvoeren bij gegeven significantieniveau
- een normale toets van het gemiddelde uitvoeren bij gegeven significantieniveau
- een tekentoets of een normale verschiltoets uitvoeren bij gegeven significantieniveau
- in een puntenwolk een trendlijn, regressielijn tekenen en er een formule van opstellen — op grond van een (door Excel) gegeven correlatiecoëfficiënt bepalen of er in een puntenwolk sprake is van een sterke of een minder sterke samenhang

Achtergronden

In de **inductieve statistiek** probeer je om aan de hand van een steekproef informatie omtrent de gehele populatie te krijgen. Maar zo krijg je alleen beperkte informatie. De inductieve statistiek geeft methoden om daarmee uitspraken over de populatie als geheel te doen. Bekende methoden zijn hypothesen toetsen, schattingsmethoden, correlatie en regressie.

Francis Galton (1822—1911) richtte aan het Londense University College een leerstoel in de eugenetica op. De wiskundigen die deze leerstoel bezetten hebben veel voor de ontwikkeling van de mathematische statistiek betekend. Zij ontwikkelden vooral de methoden van statistische toetsing.

Ronald Fischer (1890—1962) en zijn volgelingen ontwikkelden methoden die geschikt zijn voor kleine steekproeven en vonden diverse verdelingen die juist voor die situatie geschikt zijn. Verder formuleerden zij de principes van het hypothese toetsen en vonden een techniek die bekend werd als de variantieanalyse. De variantieanalyse draaide om het met wiskundige methoden scheiden van ‘echte effecten’ en ‘fouten’. Als een experiment een echt effect oplevert, blijkt uit de methode hoe sterk dit effect is in verhouding tot de fout.

Vanaf de jaren '20 van de vorige eeuw werd de statistiek voor wiskundigen een steeds volwaardiger onderwerp van onderzoek, waardoor de methoden sterk werden verfijnd en een exactere onderbouwing kregen. In 1928 publiceerden **Jerzy Neyman** (1894—1981) en **Egon Pearson** (1895—1980) (zoon van Karl Pearson) enkele geschriften waarin begrippen als ‘fout van de tweede soort’ en ‘betrouwbaarheidsinterval’ werden ingevoerd. In die tijd begon ook de industrie steeds meer de statistische methoden toe te passen, met name bij kwaliteitscontrole. Bovendien werd er gezocht naar steeds betere methoden om goede representatieve steekproeven te nemen.

Vanaf 1939 werd door **Abraham Wald** (1902—1950) de statistische beslissingstheorie ontwikkeld. Hierin werd de statistiek opgevat als een spel met de natuur als tegenstander. Hoewel dit een zeer algemene theorie is wordt hij tegenwoordig door heel veel statistici gebruikt.

Testen

Opgave 1

Een fabrikant beweert dat hoogstens 20% van de door hem geleverde producten niet deugt. Omdat de fabrikant toegeeft dat het percentage wel eens 20% zou kunnen zijn, is de nulhypothese $H_0 : p = 0,2$. Om dit te toetsen kun je bijvoorbeeld een steekproef van 40 producten nemen.

- Hoe luidt de alternatieve hypothese?
- Wat stelt p voor?
Als significantieniveau wordt 5% genomen.
- Wat wil dat zeggen?
- Bij welke aantallen wordt de nulhypothese verworpen?

Opgave 2

De belastingdienst beweert dat wel 30% van de Nederlanders op enigerlei wijze de belasting ontduikt. Deze mening wil je toetsen met een significantieniveau van 5%.

- Bepaal het kritieke gebied in een steekproef van 400 Nederlanders.
- Je neemt een steekproef van 20000 Nederlanders die belasting betalen. Bepaal ook nu het kritieke gebied.

Opgave 3

In een tijdschrift stond: "In 2009 behaalde, landelijk gezien, 75% van de kandidaten op het vwo die examens deed in het vak wiskunde A een voldoende." Een vwo-school had dat jaar 66 eindexamenkandidaten waarvan er 44 examens deden in wiskunde A. Slechts 7 kandidaten behaalden een onvoldoende. Bepaal de grootst mogelijke betrouwbaarheid waarmee je nog juist aan de uitspraak gedaan in het tijdschrift mag twijfelen.

Opgave 4

Een geldstuk is zuiver als de kans op munt gelijk is aan de kans op kruis. Of dat zo is, kun je onderzoeken door maar vaak genoeg met dit geldstuk te gooien.

- Is er met een significantie van 1% reden om aan te nemen dat het geldstuk niet zuiver is, als 47 van de 100 keer kruis gegooid wordt?
- Stel dat er 1000 keer wordt gegooid. Bij welk aantal keren kruis is er nu reden om aan te nemen dat het geldstuk niet zuiver is? Neem weer $\alpha = 0,01$.

Opgave 5

Op het etiket van een pot jam staat dat het percentage rietsuiker 12,4% is. Om dit te controleren wordt het percentage rietsuiker van 20 willekeurige potten jam bepaald.

- Formuleer de hypothesen in deze situatie. Neem aan dat het percentage rietsuiker normaal verdeeld is.
- Schat met deze resultaten de standaardafwijking in het percentage rietsuiker.

11,9	11,1	11,4	12,6
11,6	11,4	11,7	11,8
11,8	11,8	12,4	12,5
11,7	12,3	11,3	12,2
11,9	12,6	11,7	11,8

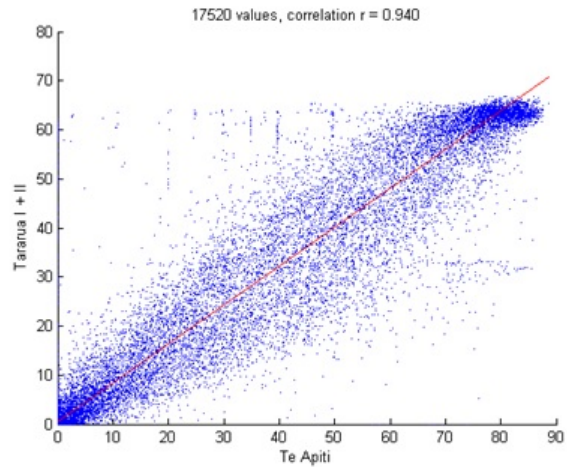
Tabel 1

Gebruik de gevonden waarde bij de rest van deze opgave.

- Toets je hypothese met een significantieniveau $\alpha = 0,10$.
- Bij welk gemiddeld percentage zou de nulhypothese verworpen worden?

Opgave 6

In Nieuw-Zeeland staan grote windmolenparken. Twee daarvan zijn Te Apiti en Taranua. Deze parken zetten een deel van de windenergie om in elektrische energie. Van beide windparken is het elektrisch vermogen 17520 keer gemeten. De meetwaarden zijn in een puntenwolk gezet. Bekijk de afbeelding. Het vermogen werd gemeten in megawatt, MW.



Figuur 1

- Hoeveel bedraagt het maximale vermogen van beide parken?
- Is er een statistisch verband? Is er een causaal verband?
- In de figuur is een trendlijn getekend. Leg uit waarom deze trendlijn door (0,0) gaat.
- Stel de vergelijking van de trendlijn op door V_{tar} uit te drukken in V_{tea} , waarbij V het vermogen van het betreffende park is.

Toepassen

Opgave 7: The Great Blackout

Op 9 november 1965 viel de stroom uit in New York City, een storing die 24 uur duurde: 'The Great Blackout'. Negen maanden later schreven de kranten over een geboorte-explosie in New York City. De tabel vermeldt het aantal geboorten in New York City in een periode van 270 tot 290 dagen na 'The Great Blackout', in augustus 1966.

Het gemiddelde aantal geboorten per dag dat over deze periode ongeveer 435 bedraagt, blijkt echter niet zo veel hoger te liggen dan het gemiddelde over het gehele jaar 1966 dat 430 bedraagt. Neem aan dat het aantal geboorten per dag in New York City over het gehele jaar 1966 redelijk constant is.

- Laat zien dat het aantal dagen in de periode van 4 tot en met 23 augustus waarop het geboortegemiddelde boven het jaargemiddelde ligt, niet significant hoog is. Neem een significantieniveau van 5%.

In de 20 dagen voorafgaande aan 4 augustus 1966 bleek op zo veel dagen het aantal geboorten kleiner te zijn dan 430, dat men van een significante afwijking kan spreken bij een significantieniveau van 5%.

- Op hoeveel dagen was er sprake van een aantal geboorten beneden het gemiddelde?

dag	aantal geboorten
04-08	448
05-08	466
06-08	377
07-08	344
08-08	448
09-08	438
10-08	455
11-08	468
12-08	462
13-08	405
14-08	377
15-08	451
16-08	497
17-08	458
18-08	429
19-08	434
20-08	410
21-08	351
22-08	467
23-08	508

Tabel 2

4 augustus 1966 was een donderdag. Op de drie zondagen in de periode van 4 - 23 augustus 1966 was het aantal geboorten kleiner dan 379. Neem aan dat het aantal geboorten in New York City normaal is verdeeld met een gemiddelde van 430 en een standaardafwijking van 40 in de 50 weken die volgen op de periode van 4 - 23 augustus 1966.

- c Toon aan dat tot op twee decimalen de kans dat op een willekeurig gekozen dag het aantal geboorten kleiner is dan 379, gelijk is aan 0,10.

In de 50 zondagen die volgen op de periode van 4 - 23 augustus 1966 blijken er 10 zondagen te zijn met een aantal geboorten kleiner dan 379.

- d Is het aantal zondagen met een aantal geboorten kleiner dan 379 significant hoog? Neem $\alpha = 5\%$.

Examen

Opgave 8: Basketballen

Jaarlijks controleert de materiaalcommissaris of de ballen van Flits voldoen aan de eisen die de basketbalbond stelt. Deze zijn:

De omtrek van de bal mag niet minder bedragen dan 75 cm en niet meer dan 78 cm. Het gewicht mag niet minder zijn dan 600 g en niet meer dan 650 g.

Bij zo'n controle komt hij tot de ontdekking dat het gewicht van de ballen klopt, maar dat de omtrek van 15 ballen niet in orde is. Omdat hierbij ook een redelijk aantal nieuwe ballen is, stelt hij zich in verbinding met de leverancier: het bedrijf Balfa. Dit bedrijf beweert dat het dagelijks 125 ballen produceert, waarvan de omtrek normaal verdeeld is met een gemiddelde van 76,5 cm en een standaarddeviatie van 0,70 cm. Neem aan dat deze gegevens juist zijn.

- a Toon aan dat men kan verwachten dat 4 ballen in de dagproductie niet voldoen aan de eisen die de bond stelt aan de omtrek.
- b Bereken in procenten nauwkeurig de kans dat in een aselechte steekproef van 5 door Balfa gemaakte ballen, elke bal voldoet aan de eisen die de bond stelt aan de omtrek.

Op grond van de eigen gegevens beweert de verkoper van Balfa dat gemiddeld hoogstens één op de twintig ballen niet aan alle eisen van de bond voldoet. De materiaalcommissaris heeft zo zijn twijfels. Zij spreken met elkaar af de bewering van de verkoper te toetsen door middel van een aselechte steekproef van 15 stuks bij een significantieniveau van 5%. Indien het resultaat de verkoper in het ongelijk stelt, krijgt Flits de 15 nieuwe ballen uit de steekproef gratis. X is het aantal ballen in de steekproef dat niet voldoet aan de eisen van de bond.

- c Bereken de kleinste waarde van X waarbij Flits de ballen gratis krijgt.

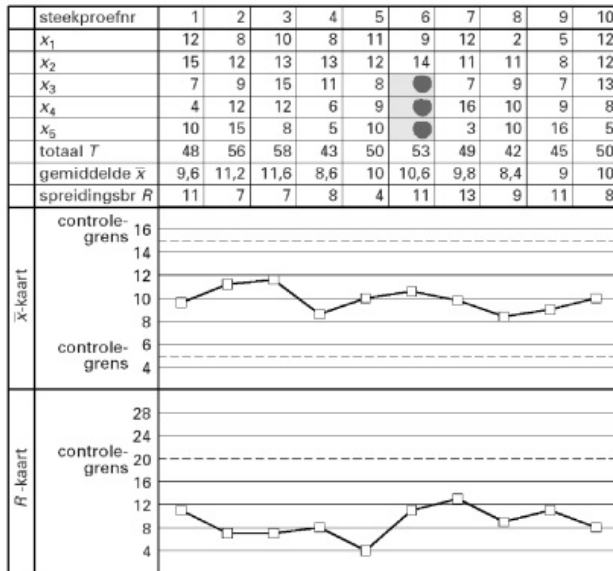
(bron: examen vwo wiskunde A in 1990, tweede tijdvak)

Opgave 9: Kwaliteitscontrole

In een fabriek worden plastic zakken gevuld met suiker. De vulmachine staat afgesteld op 510 gram. Neem aan dat het gewicht van de zakken suiker normaal verdeeld is met een gemiddelde μ van 510 gram en een standaardafwijking s van 4 gram.

- a Bereken hoeveel procent van alle zakken een gewicht minder dan 500 gram zal hebben.
- Om de kwaliteit van het vulproces te bewaken, wordt elk uur een aselechte steekproef van 5 zakken suiker genomen. Van elke zak noteert men het gewicht. Ook wordt van de steekproef het totale gewicht T berekend.
- b Bereken de kans dat het totale gewicht van de steekproef minder is dan 2525 gram.

Verder bepaalt men van elke steekproef het gemiddelde gewicht \bar{x} en de spreidingsbreedte R (dat is het verschil tussen de grootste en de kleinste meting). Men noteert al deze gegevens op een controlekaart, de \bar{x}/R -kaart. Op de \bar{x}/R -kaart hieronder staan de meetresultaten van 10 steekproeven. Iedere steekproef bestaat uit 5 zakken. Op de controlekaart worden de afwijkingen van 500 gram bij ieder van deze 5 zakken genoteerd als x_1, x_2, x_3, x_4 en x_5 . Zo heeft de derde zak van de tweede steekproef een gewicht van 509 gram. Dit is genoteerd als 9. Het gemiddelde van de eerste steekproef is 509,6 gram. Dit wordt dan genoteerd als 9,6. De spreidingsbreedte van de eerste steekproef is $515 - 504 = 11$ gram.



Figuur 2

Bij steekproef nummer 6 zijn enkele gegevens onleesbaar geworden.

- c** Welke getallen kunnen hier bijvoorbeeld gestaan hebben? Licht je antwoord toe.

Bij de controle van het vulproces met behulp van de \bar{x}/R -kaart let men erop of \bar{x} of R de zogeheten controlegrenzen overschrijden. Deze controlegrenzen zijn in de grafieken met stippellijnen aangegeven. Zodra bij een steekproef een van deze grenzen overschreden wordt, slaat men alarm. Op een gegeven moment slaat men alarm bij een steekproef, terwijl met de waarde van \bar{x} niets mis is.

- d** Wat zouden de vijf gewichten in deze steekproef bijvoorbeeld kunnen zijn? Licht je antwoord toe.

De zakken zijn bedrukt met het bedrijfslogo. Soms is dit logo onscherp afgedrukt. Volgens de afdeling Verpakkingen heeft 5% van de zakken een onscherp logo. Een werknemer van die afdeling vermoedt echter dat dit percentage hoger is dan 5%. Er wordt een steekproef getrokken van 50 zakken. Op 6 van de 50 zakken is het bedrijfslogo onscherp.

- e** Onderzoek of de 6 zakken met het onscherpe bedrijfslogo voldoende aanleiding zijn om de werknemer in het gelijk te stellen. Neem als significantieniveau $\alpha = 0,025$.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2001, eerste tijdvak)

Opgave 10: Vakkenkeuze

In het voorjaar van 1994 zijn bij een onderzoek naar vakkenkeuze 344 jongens en 493 meisjes ondervraagd die toen eindexamen havo deden. Nederlands was voor iedereen verplicht. Havo-leerlingen moesten naast Nederlands nog ten minste 5 andere vakken kiezen. In deze tabel is te zien door hoeveel procent van de ondervraagden de andere vakken zijn gekozen.

Vakkenkeuze van jongens en meisjes op havo		
vak	jongens (in %)	meisjes (in %)
Duits	31,1	46,7
Engels	98,8	97,6
Frans	10,2	38,5
Aardrijkskunde	19,2	28,2
Geschiedenis	25,3	30,2
Economie	60,2	47,9
Handelswetenschappen	43,0	29,8
Wiskunde A	43,3	62,3
Wiskunde B	54,7	22,3
Biologie	23,5	45,2
Natuurkunde	57,6	17,0
Scheikunde	42,2	24,5
Tekenen	7,0	15,2
Maatschappijleer	2,9	4,5
Muziek	0,9	3,4
Handenarbeid	2,3	4,9
Textiele werkvormen	0,0	0,4
Spaans	0,0	0,6

Tabel 3

- a** Toon aan dat van de ondervraagde leerlingen meer meisjes dan jongens economie deden. De meeste leerlingen hadden naast Nederlands 5 vakken gekozen. Sommige leerlingen hadden naast Nederlands 6 vakken gekozen. Geen van de leerlingen had naast Nederlands meer dan 6 vakken gekozen.
- b** Bereken hoeveel procent van de ondervraagde meisjes een extra vak deed. Bij het onderzoek werd ook gevraagd of je, als je opnieuw zou mogen kiezen, weer precies hetzelfde vakkenpakket gekozen zou hebben. De onderzoekers vermoedden dat ten minste de helft van de kandidaten ontevreden was over hun huidige pakket. Een onderwijsdeskundige was het daar niet mee eens. Kort voor het onderzoek beweerde hij dat minder dan de helft van alle havo-eindexamenkandidaten achteraf liever een ander pakket gekozen zou hebben. Neem aan dat de groep van 837 ondervraagde leerlingen een aselechte steekproef vormt uit alle havo-eindexamenkandidaten. Van deze groep zouden 359 leerlingen een ander pakket gekozen hebben, zo bleek uit het onderzoek.
- c** Onderzoek of bij een significantieniveau van 1% het onderzoeksresultaat voldoende aanleiding geeft om de onderwijsdeskundige gelijk te geven.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2001, tweede tijdvak)

Opgave 11: Stoppen met roken

Veel mensen beginnen op jonge leeftijd met roken en proberen daar op latere leeftijd weer mee op te houden. Dat lukt niet altijd. Het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) publiceert regelmatig cijfers waarmee het rookgedrag van Nederlanders kan worden bestudeerd. In de tabel vind je enkele getallen.

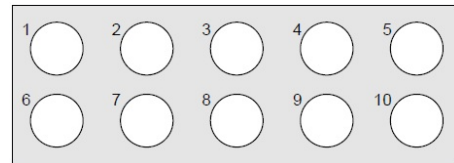
rokers en aantallen sigaretten		
jaar	2001	2005
aantal Nederlanders, in miljoenen	16,0	16,3
percentage rokers	33,3%	29,5%
gemiddeld aantal sigaretten per roker per jaar	4526	4271

Tabel 4

- a Bereken met hoeveel procent het totale aantal gerookte sigaretten in 2005 is afgenomen ten opzichte van 2001.

Er zijn veel hulpmiddelen om minder te gaan roken of er zelfs helemaal mee te stoppen. Eén daarvan is het gebruik van tabletten van het merk Fumostop. Om na te gaan of Fumostop een middel is dat inderdaad helpt, wordt het volgende onderzoek uitgevoerd. Uit alle zware rokers wordt aselekt een groep van 18 proefpersonen gekozen. Elke proefpersoon krijgt 10 tabletten die uiterlijk niet van elkaar verschillen. De tabletten zijn verpakt in doordrukstrips met bij elk tablet een nummer. Zie figuur.

Elke proefpersoon moet 10 dagen lang iedere dag bij het opstaan één willekeurig gekozen tablet innemen, het nummer van dat tablet noteren en bijhouden hoeveel sigaretten hij die dag rookt. Wat de proefpersonen niet weten maar de onderzoekers wel, is dat 5 van de tabletten inderdaad van het merk Fumostop zijn. De andere 5 tabletten bevatten geen enkele werkzame stof. We geven de 'echte' tabletten aan met F en de andere tabletten met NF.



Figuur 3

Aan de genoteerde tabletnummers kunnen de onderzoekers zien wanneer de F- en de NF-tabletten ingenomen zijn. Nico is één van de 18 proefpersonen. De mogelijkheid bestaat dat hij om de dag een F-tablet inneemt, waarmee bedoeld wordt dat hij de ene dag een F-tablet en de andere dag een NF-tablet inneemt.

- b Bereken de kans dat hij om de dag een F-tablet inneemt.
- De proefpersonen kiezen hun tabletten iedere dag dus volledig aselekt. Het kan dus gebeuren dat een proefpersoon de eerste dag een van de tabletten met nummer 1 of nummer 2 kiest.
- c Bereken hoe groot de kans is dat 6 of meer proefpersonen op de eerste dag van het onderzoek een van de tabletten met nummer 1 of 2 kiezen.

De onderzoekers vermoeden dat het gebruik van F-tabletten leidt tot het roken van minder sigaretten. Om dat na te gaan, wordt van elke proefpersoon bijgehouden hoeveel sigaretten hij in totaal heeft gerookt op de vijf dagen met een F-tablet en op de vijf dagen met een NF-tablet. Het resultaat vind je in de tabel hieronder.

aantal sigaretten																		
proefpersoon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
bij gebruik van F-tabletten	106	90	109	72	103	118	124	103	89	87	92	145	101	100	97	112	104	101
bij gebruik van NF-tabletten	112	108	132	92	96	120	145	129	101	104	127	138	124	121	139	100	93	118

Tabel 5

- d** Onderzoek met behulp van een tekentoets of er voldoende aanleiding is om het vermoeden van de onderzoekers te bevestigen. Neem hierbij als significantieniveau 5%.

Van de mensen die in 2006 rookten, rookte 24,5% per dag 20 sigaretten of meer. Rokers rookten toen gemiddeld 11,4 sigaretten per dag. Tine wil onderzoeken of het aantal sigaretten per dag normaal verdeeld zou kunnen zijn. Ze bedenkt de volgende aanpak: "Als er sprake is van een normale verdeling, dan kan ik de bijbehorende standaardafwijking berekenen. Daarna kan ik nagaan of die waarde - in combinatie met dat gemiddelde 11,4 - tot een conclusie leidt."

- e** Bereken die standaardafwijking en toon daarmee aan dat het aantal sigaretten dat een roker per dag in 2006 rookte, niet normaal verdeeld kan zijn.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2010, eerste tijdvak)



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostaat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
