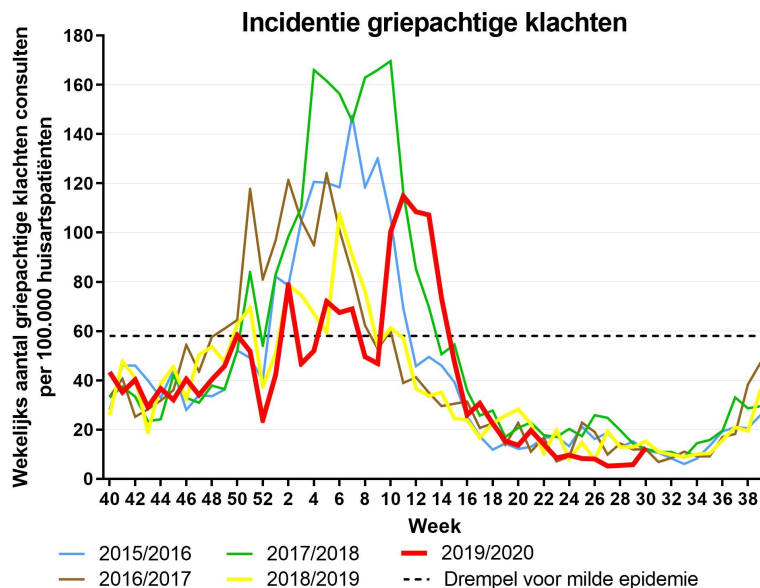


## 6.1 Het begrip toets

### Inleiding



Figuur 1 bron: RIVM

Vaak worden uitspraken over de hele bevolking gedaan op basis van een steekproef. Dat brengt natuurlijk risico's met zich mee. Immers ook als (bijvoorbeeld) in werkelijkheid 15% van de bevolking het afgelopen jaar griep heeft gehad, kan in een steekproef door toevallige omstandigheden dit percentage wel eens anders liggen. Hoe kun je zo een steekproef gebruiken om te schatten hoeveel grieppatiënten er zijn geweest?

#### Je leert in dit onderwerp

- het begrip hypothese toetsen;
- de begrippen nulhypothese, alternatieve hypothese en beslissingsvoorschrift.

#### Voorkennis

- werken met binomiale en normale kansverdelingen.

### Verkennen

#### Opgave V1

Uit onderzoek blijkt dat in een bepaalde week 3,9% van de Nederlandse bevolking griep heeft gehad. In een klas van 25 leerlingen hebben diezelfde week 4 leerlingen de griep gehad, dat is maar liefst 16%.

- Hoe groot is de kans daarop als die 3,9% inderdaad voor de hele Nederlandse bevolking geldt?
- Hoeveel grieppatiënten verwacht je in deze klas als die 3,9% inderdaad geldt?
- Kun je nu zonder meer zeggen dat de 3,9% niet klopt als je meer dan het verwachte aantal grieppatiënten in de klas aantreft?
- Bij welk aantal grieplijders in deze klas heb je minder dan 5% kans dat je het percentage van 3,9% grieppatiënten ten onrechte verworpt?

## Uitleg

Het is algemeen bekend dat ongeveer 50% van de pasgeborenen een meisje is. Maar een gynaecoloog die een eigen telling van het geslacht van geboren kinderen bijhoudt, kan de indruk krijgen dat het percentage meisjes hoger is dan 50%. Bijvoorbeeld omdat er bij de laatste 80 bevallingen 48 meisjes geboren zijn. Dit kun je als volgt onderzoeken.



Figuur 2

- Je kiest een variabele om te onderzoeken, in dit geval het aantal meisjes.
- De bekende bewering is: het deel meisjes is 50%. Dit heet de 'nulhypothese'  $H_0$ .
- Een alternatieve bewering is: het deel meisjes is groter dan 50%. Dit is de 'alternatieve hypothese'  $H_1$ .
- Je stelt vast hoeveel bevallingen je gaat onderzoeken, bijvoorbeeld 100.
- Je besluit bij welk aantal meisjes uit deze 100 bevallingen de nulhypothese niet meer wordt geaccepteerd, bijvoorbeeld bij 55 of meer. Dit heet het 'beslissingsvoorschrift'. De mogelijke waarden 55 tot en met 100 vormen samen het 'kritieke gebied'.
- Je voert het onderzoek uit en telt het aantal meisjes, bijvoorbeeld 57.
- De waarde 57 ligt in het kritieke gebied. De conclusie die uit dit onderzoek wordt getrokken, is dan: de nulhypothese is niet juist, want het deel meisjes is groter dan 50%.

Zelfs als het onderzoek goed wordt uitgevoerd, kan het gebeuren dat je een foute conclusie trekt. Daarom is het belangrijk dat je met de volgende zaken rekening houdt.

- De steekproefomvang (hier 100) moet groot genoeg zijn.
- Vóórdat de resultaten van het onderzoek bekend zijn, moet je vaststellen wanneer de nulhypothese niet meer wordt geaccepteerd.
- Er moet een willekeurig gekozen groep worden onderzocht.

En zelfs dan kan er nog een foute conclusie worden getrokken. Als de nulhypothese verworpen wordt op grond van de toets, terwijl deze eigenlijk wel waar is, heet dat een 'fout van de eerste soort'.

### Opgave 1

Gebruik de gegevens uit de **Uitleg**. Welke conclusie trek je als er 54 meisjes worden geboren in de onderzoeksgroep (in plaats van 57)?

### Opgave 2

Zelfs als het onderzoek goed wordt uitgevoerd, kan het gebeuren dat je een foute conclusie trekt.

- Waarom kan er een foute conclusie worden getrokken?
- Waarom wordt de kans op het trekken van een foute conclusie kleiner, als de steekproefomvang groter wordt gemaakt?
- 'Vóórdat de resultaten van het onderzoek bekend zijn, moet worden besloten wanneer de nulhypothese niet meer wordt geaccepteerd.'  
Waarom moet dat?
- Waarom mag het onderzoek niet worden uitgevoerd met de 80 waarnemingen van de gynaecoloog?

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Statistische methoden kunnen worden gebruikt om een bewering over een populatie te controleren. Dit heet **een hypothese toetsen**.

De **nulhypothese**  $H_0$  is de gangbare bewering (bijvoorbeeld op grond van voorgaand onderzoek).

De **alternatieve hypothese**  $H_1$  is een bewering die de nulhypothese bestrijdt.

Om een hypothese te toetsen moet je:

- een variabele kiezen;
- de nulhypothese vaststellen;
- de alternatieve hypothese vaststellen;
- het **beslissingsvoorschrift** vaststellen (beslissen wanneer welke hypothese wordt geaccepteerd of verworpen);
- een, uiteraard willekeurige, steekproef nemen van voldoende omvang;
- de steekproef analyseren en vergelijken met het beslissingsvoorschrift;
- de conclusie trekken.

In het beslissingsvoorschrift wordt afgesproken bij welke uitkomsten van de steekproef de nulhypothese wordt aangenomen of verworpen. De uitkomsten waarbij de nulhypothese wordt verworpen heet het **kritieke gebied**.

Als de nulhypothese verworpen wordt op grond van de toets, terwijl deze eigenlijk wel waar is, heet dat een **fout van de eerste soort**.

### Voorbeeld 1

Een computerprogramma moet volkomen willekeurig de getallen 0 en 1 genereren. Het aantal gegenereerde nullen en enen zou dan even groot zijn.

Het vermoeden bestaat dat het programma niet zuiver is en vaker een 0 genereert dan een 1.

Beschrijf een hypothesetoets om dit te controleren.

Antwoord

$X$  is het aantal nullen in de steekproef.  $p$  is het deel van de gegenereerde getallen dat 0 is. Het soort kansverdeling is niet genoemd.

$$H_0 : p = 0,5$$

$$H_1 : p > 0,5$$

De steekproefgrootte  $n$  is (bijvoorbeeld) 50.

Het kritieke gebied is (bijvoorbeeld)  $X \geq 35$ .

### Opgave 3

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

- Hoe wordt de uitwerking wanneer het vermoeden zou zijn: het programma genereert vaker een 1 dan een 0?
- Veronderstel dat het programma toch goed werkt, dus dat de kans op elke nul 0,5 is. De verdeling van het aantal nullen is dan binomiaal. Hoe groot is de kans dat er dan precies 35 nullen voorkomen bij  $n = 50$ ?
- Veronderstel dat het programma toch goed werkt, dus dat de kans op elke nul 0,5 is. De verdeling van het aantal nullen is dan binomiaal. Hoe groot is de kans dat er dan 35 of meer nullen voorkomen?
- Hoe groot is dus de kans op een fout van de eerste soort?

**Voorbeeld 2**

De inhoud van een fles cola is ongeveer 1,5 L.

Omdat de fabrikant volgens de Europese richtlijnen niet te veel klanten mag teleurstellen, moet hij zijn flessen vullen met voldoende cola. De Europese richtlijn schrijft voor: het volume  $V$  van de cola moet gemiddeld 1530 mL zijn. De standaardafwijking van  $V$  moet maximaal 18 mL zijn.

Beschrijf hoe je de inhoud van zo'n colafles toetst met een steekproefgrootte van 1.

Antwoord

$V$  is het volume van de cola in mL. De verdeling is niet bekend.

De standaardafwijking  $\sigma_V$  is 18 mL.

$H_0 : V = 1530$  mL.

$H_1 : V < 1530$  mL.

De steekproefgrootte:  $n = 1$ .

Het kritieke gebied is (bijvoorbeeld)  $V < 1512$  mL.



Figuur 3

**Opgave 4**

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- Hoe ziet de hypothesetoets er uit voor een literfles met een vereiste inhoud van 1020 mL en een standaardafwijking van 12 mL?
- Veronderstel dat de hoeveelheid cola normaal verdeeld is. Waarom maakt het nu niet uit of het  $<$ -teken of het  $\leq$ -teken wordt gebruikt?
- Veronderstel dat de fabrikant de flessen volgens de Europese richtlijnen vult en dat de hoeveelheid cola per fles normaal verdeeld is. Hoe groot is dan de kans dat de nulhypothese toch wordt verworpen als het kritieke gebied  $V < 1008$  mL is?

**Opgave 5**

Bekijk **Voorbeeld 2** nog eens.

- Waarom is een steekproef van 1 fles cola eigenlijk onzinnig?  
Neem aan dat de inhoud van de colaflessen normaal is verdeeld en dat je een steekproef van 100 flessen doet. Je kijkt dan naar de gemiddelde inhoud van die flessen.
- Hoe moet je de hypothesetoets aanpassen?
- Hoe groot is nu de kans dat de nulhypothese toch wordt verworpen als het kritieke gebied  $\bar{V} < 1512$  mL is?

**Verwerken****Opgave 6**

Er wordt onderzocht of een inpakmachine voor rollen koekjes goed is afgesteld. Er zouden 20 koekjes in een rol moeten gaan.

Beschrijf de variabele, nulhypothese en alternatieve hypothese van de toets.

**Opgave 7**

De lengte van vrouwen is bij benadering normaal verdeeld. In 1999 was de gemiddelde lengte van de vrouwen in Nederland 167 cm. De standaardafwijking van de lengte was 6,5 cm. Het is niet ondenkbaar dat de lengte van de Nederlandse vrouw sinds die tijd groter is geworden. Een onderzoeksbureau onderzoekt dit door middel van een aselechte steekproef van 100 vrouwen in Nederland. Vooraf stellen de onderzoekers dat ze zullen concluderen dat de Nederlandse vrouw langer is geworden, als de gemiddelde lengte in die steekproef 169 cm of meer is.

- Noteer de variabele, nulhypothese, alternatieve hypothese, standaardafwijking, steekproefomvang en het kritieke gebied.

- b Als de lengte van vrouwen niet is toegenomen sinds 1999, hoe groot is dan de kans dat een vrouw langer is dan 169 cm?
- c Waarom is het dus zinloos om in dit geval een steekproef van 1 persoon te nemen?

### Opgave 8

Een leraar denkt uit jarenlange ervaring te weten dat  $\frac{6}{10}$  deel van de leerlingen zich aan zijn planning houdt. Zijn nieuwe collega vermoedt dat dit deel hoger is. Ze besluiten het te onderzoeken met een hypothesetoets. Ze hebben samen 80 leerlingen. Ze spreken een grens af van 54: bij 54 of meer leerlingen die 'bij' zijn krijgt de nieuwe collega gelijk.

- a Noteer de variabele(n), de nulhypothese, de alternatieve hypothese en het kritieke gebied.
- b Neem aan dat de kans dat een leerling 'bij' is,  $\frac{6}{10}$  is. Hoe groot is dan de kans dat de ervaren collega gelijk krijgt?
- c En hoe groot is dan de kans dat de ervaren collega geen gelijk krijgt, ook al is de kans dat een leerling 'bij' is 0,6?

### Opgave 9

Een fabrikant van verf stelt dat hun witte verf een oppervlakte dekt van  $15 \text{ m}^2$  per liter. Omdat dit een goede dekking is, besluit een schildersbedrijf met deze verf te gaan werken. Na een tijdje gelooft het management van het schildersbedrijf echter dat de voorgestelde dekking van  $15 \text{ m}^2$  per liter te hoog is. Er lijkt namelijk meer verf nodig te zijn dan berekend: de ingekochte emmers zijn sneller op dan verwacht.

Het besluit is om de dekking van de verf te toetsen. Het besluit wordt: bij een dekking van minder dan  $13,5 \text{ m}^2$  per liter is deze inderdaad niet goed genoeg, en wordt een andere verfsoort gebruikt.

- a Noteer de variabele(n), de nulhypothese, de alternatieve hypothese en het kritieke gebied.
- b Het management lijkt voorzichtig met hun keuze. Noem redenen waarom ze niet direct over zouden overstappen op nieuwe verf.

### Opgave 10

Bij het uitvoeren van statistische hypothesetoetsen kan de conclusie fout zijn, zelfs als het onderzoek helemaal goed wordt uitgevoerd. Welke twee foute conclusies kunnen er worden getrokken?

## Toepassen

### Opgave 11: Suikerziekte

Een onderzoeker voert een hypothesetoets uit naar de toename van suikerziekte onder Nederlanders. De gegevens van het onderzoek zijn:

$X$  is het aantal Nederlanders met suikerziekte in een steekproef.

$p$  is het deel van de mensen uit de steekproef met suikerziekte.

$$H_0 : p = \frac{1}{15} \text{ en } H_1 : p > \frac{1}{15}.$$

De steekproefomvang is 1000.

De onderzoeker wil het heel zeker weten als het aantal Nederlanders met suikerziekte is gestegen. Hij wil dus de kans dat  $H_1$  wordt aangenomen terwijl  $H_0$  waar is, klein maken.

- a Welk kritieke gebied moet hij kiezen om ervoor te zorgen dat deze kans kleiner is dan 10%?
- b Welk kritieke gebied moet hij kiezen om ervoor te zorgen dat deze kans kleiner is dan 5%?
- c Welk kritieke gebied moet hij kiezen om ervoor te zorgen dat deze kans kleiner is dan 1%?

## Testen

### Opgave 12

Iemand beweert dat 10% van het niet-brildragende deel van de Nederlandse bevolking contactlenzen draagt. Maar hij raakt na een paar keer vragen aan het twijfelen, wellicht is dat percentage toch hoger. Hij besluit om zijn mening te toetsen in een representatieve steekproef van 50 personen.

- a Hoe luiden de nulhypothese en de alternatieve hypothese?
- b Als hij bij 10 of meer personen in de steekproef met contactlenzen zijn oorspronkelijke mening verwerpt, hoe groot is dan de kans dat hij dit ten onrechte doet?
- c Als hij bij 100 of meer personen met contactlenzen in een steekproef van 500 zijn oorspronkelijke mening verwerpt, hoe groot is dan de kans dat hij dit ten onrechte doet?

### Opgave 13

Het vulgewicht van kilopakken suiker van merk A is volgens de fabrikant normaal verdeeld met een gemiddelde van 1002 gram en een standaardafwijking van 3 gram. In een restaurant worden 10 van die pakken suiker gekocht en de restauranthouder ontdekt dat in die 10 pakken gemiddeld maar 999 gram suiker zit.

- a Mag de restauranthouder op grond van deze steekproef zonder meer aannemen dat de fabrikant zijn vulmachine moet bijstellen?
- b Hoe groot is de kans dat de restauranthouder ten onrechte reclameert?
- c De fabrikant controleert zijn vulmachine door 100 pakken te wegen. Hij vindt een gemiddelde gewicht van 1001 gram. Omdat dit aan de lage kant is besluit hij zijn vulmachine bij te stellen. Hoe groot is de kans dat hij dit terecht doet?



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: [f.spijkers@math4all.nl](mailto:f.spijkers@math4all.nl)

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij [a.f.otten@math4all.nl](mailto:a.f.otten@math4all.nl) een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.

---

