5.3 Standaardiseren

Inleiding

In het voorgaande heb je met de normaalkromme en normale stochasten leren werken. Een normale kansverdeling wordt gekarakteriseerd door gemiddelde μ en standaardafwijking σ. Maar er zijn situaties denkbaar waarin je één van beide niet weet. Bijvoorbeeld als je bij het vullen van bijvoorbeeld een pak suiker het vulgewicht nauwkeuriger wilt afstellen.
En soms wil je twee normale verdelingen met verschillende waarden voor μ en/of σ vergelijken.
In deze gevallen ga je standaardiseren...

Je leert in dit onderwerp

- standaard normale verdeling (standaard klokvorm) en standaardiseren;
- verwachtingswaarde of standaarddeviatie berekenen bij een normale stochast;
- toepassen van de wortel-n-wet bij een steekproef uit een normale verdeling.

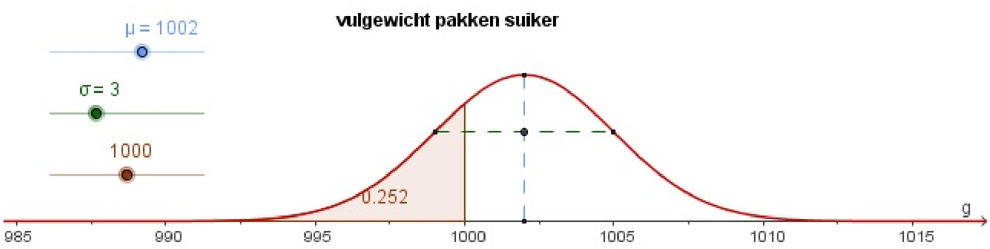
Voorkennis

- werken met normale stochasten;
- kansen berekenen bij normale stochasten;
- grenswaarden terugzoeken bij normale kansen;
- de wortel-n-wet gebruiken bij het berekenen van verwachtingswaarde of standaarddeviatie.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet



Figuur 1

Je ziet hier hoe het vulgewicht van kilopakken suiker is ingesteld op een gemiddelde van $\mu = 1002$ en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ gram. Maar nu bevat ongeveer 25% van de pakken minder dan 1000 gram.

a Je wilt dat niet meer dan 5% van de pakken minder dan 1000 gram bevat. Hoe doe je dat?

b Stel dat je drie kilopakken suiker koopt. Hoe groot is de kans dat je bij de gegeven instelling minder dan 3000 gram suiker hebt?

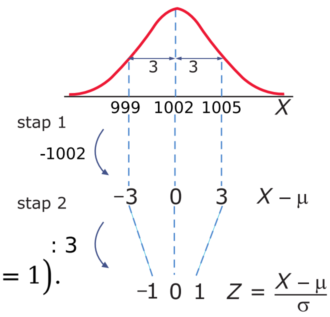
Uitleg

Bekijk de applet

Het vulgewicht X van een kilopak suiker is normaal verdeeld. De fabrikant heeft het gewicht van zijn vulmachine ingesteld op een gemiddelde van $\mu = 1002$ en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ gram.

Het blijkt dat ongeveer 25% van de pakken minder dan 1000 gram suiker bevat. De fabrikant vindt dat teveel.
Het is de bedoeling dat hoogstens 5% van de pakken minder dan 1000 gram bevat.
In de applet krijg je dit voor elkaar door bijvoorbeeld het gemiddelde vulgewicht μ te verhogen. Om μ te kunnen berekenen, ga je standaardiseren.

De standaard normaalkromme heeft gemiddelde $\mu = 0$ en standaardafwijking $\sigma = 1$, de bijbehorende stochast is Z. De normaalkromme bij stochast X kan hieruit ontstaan door alle waarden van Z met σ te vermenigvuldigen en er μ bij op te tellen: $X = \sigma \cdot Z + \mu$.
Omgekeerd kun je elke normaal verdeelde stochast X omrekenen naar de standaardnormale stochast: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.



Figuur 2

De kans $\text{P}\left(X < x | \mu = m \text{ en } \sigma = s\right)$ is hetzelfde als $\text{P}\left(Z < \frac{x-m}{s} | \mu = 0 \text{ en } \sigma = 1\right)$.

De fabrikant wil μ zo aanpassen, dat de kans op een pak suiker dat minder dan 1000 gram weegt hoogstens 0,05 is. Dus:

$$\text{P}\left(X < 1000 | \mu = m \text{ en } \sigma = 3\right) = \text{P}\left(Z < \frac{1000-m}{3} | \mu = 0 \text{ en } \sigma = 1\right) \leq 0{,}05$$

Bij een kans van 0,05 vind je een z-waarde: $z = \frac{1000-m}{3} = -1{,}645$.

En dan krijg je $m \approx 1004{,}9$.

Als het gemiddelde gewicht 1005 gram is, dan heeft hoogstens 5% van de pakken een gewicht minder van 1000 gram. Hoe groter het gemiddelde wordt, hoe kleiner dit percentage wordt.

Bij vraagstukken waar je in het geval van een normale verdeling het gemiddelde of de standaardafwijking moet berekenen, zul je deze eerst om moeten schrijven naar de standaard normale verdeling door te standaardiseren.

Opgave 1

Bestudeer de **Uitleg**. Werk met de daarin genoemde applet om de volgende vragen te beantwoorden.

a Pas eerst alleen het gemiddelde aan. Bij welk gemiddelde is niet meer dan 5% van de pakken lichter dan 1000 gram?

b Waarom is dit voor de fabrikant een dure oplossing?

c Laat nu het gemiddelde staan op $\mu = 1002$ gram en pas de standaardafwijking aan. Bij welke standaardafwijking is niet meer dan 5% van de pakken te licht?

d Welke mogelijke voor- en nadelen heeft deze oplossing voor de fabrikant?

Opgave 2

Bekijk de **Uitleg**.

a Reken na dat inderdaad ongeveer 25% van de pakken minder weegt dan 1000 gram.

b Laat zien dat het antwoord bij a ook kan worden gevonden met de standaardnormale stochast Z.

Er mogen maar maximaal 5% van de pakken suiker een gewicht hebben van minder dan 1000 gram.

c Laat zien dat dit het geval is bij een gemiddeld gewicht groter dan 1004,93.

De fabrikant wil het gemiddeld gewicht van 1002 gram behouden, maar de standaardafwijking aanpassen.

d Reken na dat dan $\sigma < 1{,}216$.

Opgave 3

Van een bepaald type batterij is de levensduur normaal verdeeld met een gemiddelde van 80 uur en een standaardafwijking van 255 minuten.

a De fabrikant vermeldt op de verpakking dat deze batterijen 75 uur mee gaan. Hoeveel procent van de batterijen haalt deze levensduur niet?

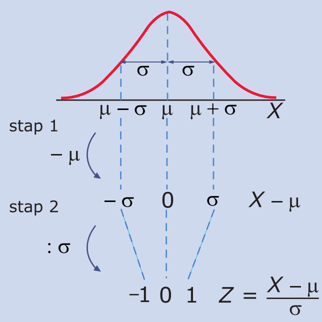
b Door het verbeteren van het fabricageproces gaan de batterijen gemiddeld langer mee. De standaardafwijking van de levensduur blijft hetzelfde. De fabrikant garandeert nu dat slechts 1% van de batterijen minder dan 90 uur mee gaat. Hoeveel bedraagt nu de gemiddelde levensduur van dit soort batterijen? Rond af op hele uren.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De vorm van de normaalkromme X hangt af van het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ. Neem je nu $\mu = 0$ en $\sigma = 1$, dan krijg je de **standaard normaalkromme** of **standaard klokvorm**. Dit is een speciale normaalkromme, die hoort bij de standaard normaal verdeelde stochast Z.
Van elke normaal verdeelde stochast X kun je zo'n standaard normaal verdeelde stochast Z maken door van de x-waarden die de stochast X kan aannemen eerst het gemiddelde μ af te trekken en daarna te delen door de standaardafwijking σ.

Je krijgt dan de z-waarden: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.



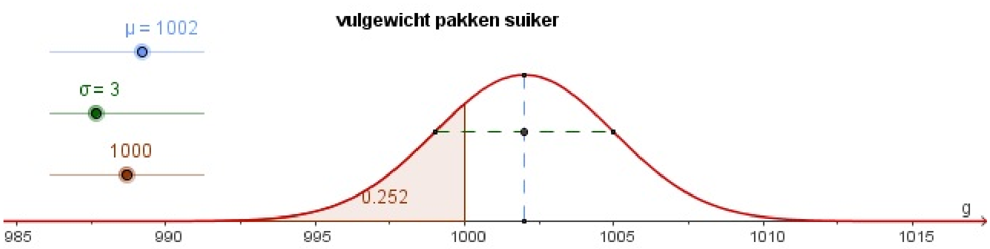
Figuur 3

Je noemt dit het **standaardiseren** van de normaal verdeelde stochast X. Kansen als $P(X \leq x)$ met een bepaald gemiddelde μ en standaardafwijking σ worden dan herschreven tot $P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ met het nieuwe gemiddelde $\mu = 0$ en standaardafwijking $\sigma = 1$.
De hoofdletter Z wordt altijd gebruikt voor de standaard normaal verdeelde stochast.

Het standaardiseren wordt vooral gebruikt in situaties waarbij je het gemiddelde of de standaardafwijking van een normaal verdeelde stochast moet berekenen (bij gegeven kans en grenswaarde). Maar je kunt het ook gebruiken om normale verdelingen te vergelijken.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet



Figuur 4

Het vulgewicht G van kilopakken suiker is ingesteld op een gemiddelde van $\mu = 1002$ en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ gram. Dan bevat ongeveer 25% van de pakken minder dan 1000 gram. Je wilt dat niet meer dan 10% van de pakken minder dan 1000 gram bevat. Hoe moet je daartoe de standaardafwijking σ aanpassen?

Antwoord

Je moet oplossen: $P(X < 1000 | \mu = 1002 \text{ en } \sigma = s) < 0,1$.

Standaardiseren: $P\left(Z < \frac{1000-1002}{s} | \mu = 0 \text{ en } \sigma = 1\right) < 0,1$.

Dit geeft $\frac{1000-1002}{s} \approx -1,2816$.
Hieruit volgt dat de standaardafwijking $s = \sigma \approx 1,56$ gram moet worden.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de standaardnormale verdeling toepast bij het berekenen van een standaardafwijking.

a Reken zelf de berekening van de nieuwe standaardafwijking na.

b Stel je voor dat de eisen worden aangescherpt: niet meer dat 2,5% van de pakken suiker mag minder dan 1000 gram wegen. Welke standaardafwijking moet je dan hanteren?

Opgave 5

Aan een examen nemen 3000 kandidaten deel. De resultaten zijn normaal verdeeld. Het gemiddelde cijfer is 5,0. Slechts 10% van de kandidaten haalde een 7,0 of hoger.
Welke standaardafwijking heeft de verdeling van deze cijfers? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 6

In een fabriek worden schroeven gemaakt met verschillende afmetingen. Voor een klant moet er een partij schroeven gemaakt worden waarvan de kop een diameter heeft tussen de 9,98 mm en 10,03 mm. Schroeven met een te dikke of te dunne kop worden afgekeurd. De diameter D van de schroeven is normaal verdeeld met een gemiddelde van 9,99 mm. De standaardafwijking van de machine bedraagt 0,02 mm.

a Hoeveel procent van de schroeven zal goedgekeurd worden?

b Hoeveel procent van de schroeven zal worden goedgekeurd als de fabrikant er in slaagt de standaardafwijking van de machine terug te brengen naar 0,01 mm?

De fabrikant wil dat minstens 99% van de schroeven goedgekeurd wordt. Hij denkt dat te kunnen bereiken door een andere instelwaarde van de machine te kiezen. Ook kan de machine fijner worden afgesteld, waardoor de standaardafwijking verandert.

c Op welke waarden moet hij de machine laten instellen?

Voorbeeld 2

Het vulgewicht X van kilopakken suiker is ingesteld op een gemiddelde van $\mu = 1002$ en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ gram. Je koopt 5 van die kilopakken suiker.
Bereken in vier decimalen de kans dat het totale gewicht minder dan 5000 gram is.
Bereken ook in vier decimalen de kans dat het gemiddelde gewicht van de 5 pakken suiker meer dan 1003 gram is.

Antwoord

Je voert nu 5 keer hetzelfde kansexperiment uit, namelijk het kiezen van een pak suiker uit een heel groot aantal van die pakken. Hier geldt dus de $\sqrt{n}$-wet.

Het totale gewicht T is daarom ook normaal verdeeld met $\mu(T) = 5 \cdot \mu(X) = 5010$ en $\sigma(T) = \sqrt{5} \cdot \sigma(X) = 3 \cdot \sqrt{5}$ gram.

De gevraagde kans is: $P\left(T < 5000 | \mu = 5010 \text{ en } \sigma = 3 \cdot \sqrt{5}\right) \approx 0,0678$.

Het gemiddelde gewicht G is ook normaal verdeeld met $\mu(G) = \mu(X) = 1002$ en $\sigma(G) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$ gram.

De gevraagde kans is: $\text{P}\left(G > 1003 | \mu = 1002 \text{ en } \sigma = \frac{3}{\sqrt{5}}\right) \approx 0{,}2280$.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Reken zelf de twee kansen, die genoemd worden, na.

b Bereken in vier decimalen de kans dat het totale gewicht van tien pakken suiker meer is dan 10010 gram maar minder dan 10020 gram.

c Bereken de kans dat het gemiddelde gewicht van zeven pakken suiker minder is dan 1 kg.

Opgave 8

De lengte L van pvc-buizen is normaal verdeeld met een gemiddelde lengte van 3 meter en een standaardafwijking van 5 cm.

a Bereken in vier decimalen de kans dat een pvc-buis langer is dan 3,08 meter.

b Elektricien Wim moet een afstand van precies 30,2 meter overbruggen met pvc-buizen. Bereken in vier decimalen de kans dat hij aan 10 pvc-buizen genoeg heeft.

Voorbeeld 3

Bekijk de lengte in een groep zeventienjarige jongens en in een groep zeventienjarige meisjes. Bij de jongens is de gemiddelde lengte 180 centimeter en de standaardafwijking 7 centimeter. Bij de meisjes is de gemiddelde lengte 170 centimeter en de standaardafwijking 6 centimeter.
Een jongen en een meisje uit deze groepen krijgen verkering. Ze zijn beiden erg lang: de jongen 197 centimeter en het meisje 187 centimeter.
Wie is de grootste uitschieter in zijn of haar groep?

Antwoord

De jongen heeft een z-waarde van $\frac{197-180}{7} \approx 2{,}43$.

Het meisje heeft een z-waarde van $\frac{187-170}{6} \approx 2{,}83$.

Het meisje is de grootste uitschieter in haar groep: ze wijkt bijna drie standaardafwijkingen af van de gemiddelde meisjeslengte.

Opgave 9

Aan een examen hebben 200 kandidaten meegedaan. Het examen bestaat uit twee gedeelten: een schoolexamen (SE) en een centraal examen (CE). Uit onderzoek is gebleken dat de examencijfers normaal verdeeld zijn. Het gemiddelde cijfer voor het schoolexamen was een 6,5 en de standaardafwijking was 1,0. Het gemiddelde cijfer voor het centraal examen was een 5,5 en de standaardafwijking was 2,0. Een leerling heeft een 7,0 gehaald voor het schoolexamen en een 6,0 voor het centraal examen.

a Noem het cijfer voor het schoolexamen S en dat voor het centraal examen C. Schets de normaalkrommen van de verdeling van zowel S als C. Geef de cijfers van de leerling in die figuren aan.

b Kun je de prestaties van de leerling voor het SE en het CE nu goed met elkaar vergelijken? Licht je antwoord toe.

Om te beoordelen of deze leerling naar verhouding op het SE beter of minder heeft gepresteerd dan op de CE moet je beide verdelingen standaardiseren.

c Bereken zowel voor het resultaat op het SE als dat op het CE de bijbehorende z-waarde. Welk resultaat was naar verhouding beter?

Opgave 10

In IQ-testen en bij examens worden vaak z-waarden gebruikt. Uit een onderzoek blijkt dat de score van leerlingen bij het centraal schriftelijk eindexamen wiskunde A1 vwo in 2000 bij benadering normaal verdeeld was. Het gemiddelde was 62 punten en 28% van de leerlingen had een onvoldoende (54 punten of minder).

a Welke z-waarde hoort bij 28%?

b Bereken de standaardafwijking.

c Welke z-waarden hebben de 20% beste leerlingen?

d In 2001 was de z-waarde die hoort bij het percentage onvoldoendes op het centraal schriftelijk eindexamen wiskunde A1 vwo gelijk aan $-0{,}601$.

Welke uitspraak kun je doen over het verschil tussen beide centraal schriftelijke eindexamens wat betreft de scores voor wiskunde A1 vwo?

Verwerken

Opgave 11

Op het doosje met Tea-for-one-builtjes staat dat er 3 gram thee in zo'n builtje zit. Het gewicht T van deze theebuiltjes blijkt normaal verdeeld te zijn met een gemiddelde gewicht van 3,3 gram en een standaardafwijking van 0,24 gram. In een voordeelverpakking zitten 50 builtjes.

a Hoeveel van de builtjes in de voordeelverpakking zullen naar verwachting te weinig thee bevatten?

b De fabrikant vindt dat maar hoogstens twee builtjes een te laag gewicht mogen hebben. Op welk gemiddelde gewicht moet hij de vulmachine dan afstellen (bij gelijkblijvende standaardafwijking)? Geef je antwoord in grammen op twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 12

Het gewicht S van kilopakken suiker is normaal verdeeld.
De fabrikant wil dat hoogstens 5% van al zijn kilopakken suiker te weinig suiker bevat.

a Welk gemiddelde vulgewicht moet hij nu instellen bij een gegeven standaardafwijking van 4 gram (de nauwkeurigheid van de vulmachine)?

b De Europese Unie stelt een scherpere eis: slechts 2% van de pakken mag te licht zijn. Welk gemiddelde vulgewicht moet de fabrikant nu instellen bij een standaardafwijking van 4 gram?

De fabrikant wordt niet blij van het verhogen van het gemiddelde vulgewicht, want dat kost hem nogal wat extra geld. Hij moet dan immers gemiddeld meer suiker in een pak stoppen. Daarom besluit hij om niet het gemiddelde vulgewicht aan te passen, maar de vulmachine nauwkeuriger af te stellen. Het gemiddelde vulgewicht is 1003 gram en hij gaat uit van de eis van de EU dat hoogstens 2% van de pakken te licht mag zijn.

c Op welke standaardafwijking moet zijn vulmachine worden afgesteld?

Opgave 13

Bij de serieproductie van een bepaald type auto wordt het plaatsen van het stuur door mensen gedaan. Deze handeling kost gemiddeld 55 seconden. De handelingstijd T blijkt ongeveer normaal te zijn verdeeld met een standaardafwijking van 4 seconden.

a Er worden in een bepaalde maand 1200 van deze auto’s geproduceerd. Schat het aantal auto’s waarbij het langer dan 60 seconden geduurd heeft om het stuur te plaatsen.

b Wat is de langzaamste tijd van de 5% snelste handelingstijden?

c De fabrikant van deze auto’s onderzoekt of een machine de mens kan vervangen. De gemiddelde afhandelingstijd is ook dan 55 seconden, maar de standaardafwijking wordt veel kleiner. Nu duurt maar 1% van alle afhandelingstijden meer dan 60 seconden.
Welke standaardafwijking geldt voor deze machine?

Opgave 14

In een château in de wijnstreek Bordeaux worden veel wijnflessen van 75 cl gevuld. Dit gebeurt natuurlijk machinaal. De inhoud I van een wijnfles is bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van ongeveer 79 cl en een standaardafwijking van 3 cl.

a Wijnliefhebber Eric koopt twaalf flessen wijn van dit château. Hoeveel flessen zullen naar verwachting een inhoud hebben van meer dan 75 cl, maar minder dan 80 cl?

b Bereken in vier decimalen de kans dat de gemiddelde inhoud van de twaalf flessen die Eric gekocht heeft, minder is dan 78 cl.

c De eigenaar van het château vindt dat er te veel flessen zijn die te weinig wijn bevatten (minder dan 75 cl). Hij wil dat hoogstens 4% van alle flessen te weinig wijn bevat. Daartoe past hij de standaardafwijking (de nauwkeurigheid van de machine) aan. Wat wordt de nieuwe standaardafwijking? Geef je antwoord in cl op twee decimalen.

Opgave 15

Een bakker bakt kerststollen. Het gewicht K van deze kerststollen is bij benadering normaal verdeeld.

a Stel het gemiddelde van een kerststol is 1000 gram. Bereken de standaardafwijking als 5% van de stollen minder weegt dan 900 gram.

b Stel het gemiddelde van een kerststol is nog steeds 1000 gram. Hoeveel procent van de stollen weegt dan minder dan 900 gram als de standaardafwijking 60 gram is?

c Bereken het gemiddelde gewicht van de stollen als 5% van de stollen minder weegt dan 900 gram bij een standaardafwijking van 65 gram.

Je koopt bij deze bakker drie kerststollen. Ga er van uit dat het gemiddelde gewicht 1000 gram is met een standaardafwijking van 50 gram.

d Bereken in vier decimalen de kans dat deze drie kerststollen samen minder dan 2950 gram wegen.

e Bereken in vier decimalen de kans dat het gemiddelde gewicht van deze drie kerststollen kleiner is dan 950 gram.

Opgave 16

Limburgse kaas wordt verkocht in pakjes van 200 gram. De snijmachine van de kaasboer is zo afgesteld dat het gewicht K van de pakjes kaas normaal verdeeld is met een gemiddelde van 202,5 gram en een standaardafwijking van 4 gram.

a Bereken in vier decimalen de kans dat een pakje kaas minder dan 200 gram weegt.

b In een doos gaan 50 pakjes kaas. Bereken de kans dat een doos minder dan 10 kg kaas bevat. Rond af op acht decimalen.

c Een winkelier bestelt bij de kaasboer een groot aantal pakjes kaas. Hij wil dat de kans dat het gemiddelde gewicht van deze pakjes kaas minder is dan 202 gram, hoogstens 10% is.
Hoeveel pakjes kaas moet de winkelier minimaal bestellen?

Toepassen

Opgave 17: Veredeling van zaden

Bij een veredelingsbedrijf van zaden wordt de lengte van een bepaalde plant gemeten. Men vindt dat de lengtes L van deze planten normaal verdeeld zijn. 12,5% van de planten heeft een lengte van meer dan 60 cm en 39% van de planten is niet groter dan 30 cm.

a Bereken de gemiddelde lengte en de standaardafwijking in mm nauwkeurig van deze plantensoort.

Te kleine planten zijn niet geschikt voor de zaadontwikkeling. Deze planten worden vernietigd. Het blijkt dat 30% van de planten vernietigd moet worden. Ga uit van een gemiddelde van 36 cm en een standaardafwijking van 22 cm.

b Tot welke lengte worden de planten vernietigd? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Testen

Opgave 18

Van een partij suiker, verpakt in pakken van 1000 g, blijkt 15% minder te wegen dan 1000 g. Het vulgewicht is gelijk aan het gemiddeld gewicht. Als de standaardafwijking van de machine 7 g bedraagt, waar staat het vulgewicht dan op ingesteld?

Opgave 19

Een machine die flessen vult, is ingesteld op een gemiddeld vulgewicht van 1015 g. De standaardafwijking is onbekend. Uit onderzoek is gebleken dat 1,5% van de flessen een gewicht heeft dat kleiner is dan 1000 g. Bepaal de standaardafwijking.

Opgave 20

Bloemzaadjes worden verkocht in zakjes van 30 g. Het gewicht van een zakje uit een grote partij is normaal verdeeld met een gemiddelde van 31 g en een standaardafwijking van 0,6 g. Uit de partij wordt willekeurig een zakje genomen.

a Hoe groot is de kans dat het zakje meer dan 32 g weegt?

b Hoe groot is de kans dat het gewicht van het zakje meer dan 4% afwijkt van het gemiddelde?

c Hoeveel procent van de zakjes weegt te weinig?

d De fabrikant vindt het percentage bij c te groot en besluit het gemiddelde vulgewicht wat te verhogen tot maar 1% van de zakjes te licht is. Welk vulgewicht moet hij dan instellen?

Uit de oorspronkelijke partij wordt een steekproef van 25 zakjes getrokken.

e Hoe groot is de kans dat de totale hoeveelheid bloemzaadjes meer dan 780 g weegt?

f Hoe groot is de kans dat het gemiddelde gewicht van een zakje uit de steekproef meer dan 4% afwijkt van het populatiegemiddelde?