# 5.2 Normale kansen

## Inleiding

Bij heel veel continue toevalsvariabelen blijkt een mooie symmetrische klokvormige kansdichtheidsfunctie te horen. Dat geldt voor het gewicht van appels, de lengte van een grote groep mensen, vulgewichten van literpakken, e.d.
De beroemde wiskundige Gauss (1777—1855) vond er een formule voor. Sinds die tijd spreek je van een 'Gausskromme' of ook wel 'normaalkromme'. Je zegt bijvoorbeeld dat het vulgewicht van pakken suiker normaal verdeeld is.

Figuur 1

### Je leert in dit onderwerp

- kansen berekenen bij een gegeven grenswaarde van een normaal verdeelde stochast;
- bij een gegeven kans de grenswaarden berekenen van een normale verdeelde stochast.

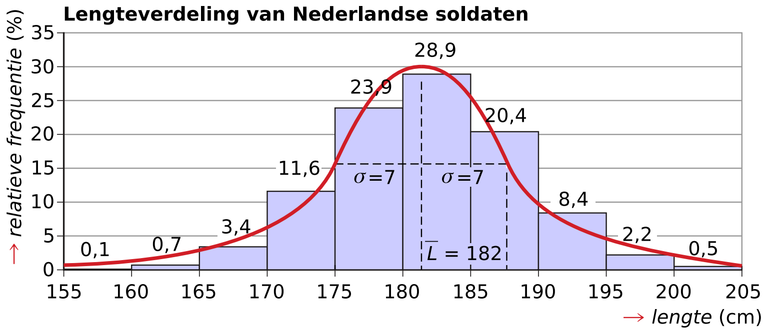
### Voorkennis

- werken met continue stochasten;
- de normaalkromme te hanteren;
- de vuistregels voor de normaalkromme gebruiken.

## Verkennen

### Opgave V1

Hier zie je de lengteverdeling van een groep soldaten op een bepaalde kazerne.




Figuur 2

De lengte $L$ is een continue stochast waarbij een verdeling hoort waarvan de grafiek een mooie klokvorm heeft die wordt bepaald door het gemiddelde $\mu(L) = 182$ en de standaardafwijking $\sigma(L) = 7$ cm.

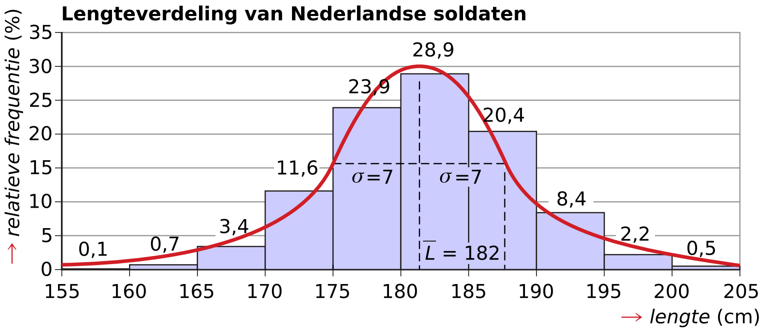
**a** Wat stelt nu $P(L < 175)$ voor?

**b** Waarom kun je deze kans uit de figuur gemakkelijk berekenen en $P(L < 171)$ niet zo eenvoudig?

**c** Wat kun je zeggen van $P(L = 175)$?

## Uitleg

Bekijk de figuur met de lengteverdeling van een groep soldaten op een kazerne. Bij de lengte $L$ (cm) hoort een normaalkromme met een gemiddelde van 182 centimeter en een standaardafwijking van 7 centimeter. Anders gezegd: $L$ is een normaal verdeelde kansvariabele.




**Figuur 3**

Bedenk wel dat de gegevens van de soldaten op hele lengtes zijn afgerond. Als je vraagt naar het percentage soldaten met een lengte van 180 centimeter, dan moet je goed afspreken wat je bedoelt: precies 180 centimeter, of afgerond 180 centimeter.

Vanaf nu hanteer je de afspraak dat je bij normale verdelingen geen rekening houdt met afrondingen, tenzij duidelijk is dat dit moet. Dit betekent dat: $\text{P}(162 < L < 178) = \text{P}(162 \leq L < 178) = \text{P}(162 < L \leq 178) = \text{P}(162 \leq L \leq 178)$ als $L$ normaal verdeeld is.

De 'normale kans' dat een soldaat van deze kazerne tussen de grenswaarden 165 en 180 centimeter lang is, gegeven dat $\mu(L) = 182$ en $\sigma(L) = 7$, noteer je als:
$\text{P}(165 \leq L < 180) \mid \mu(L) = 182 \text{ en } \sigma(L) = 7$

| betekent: 'gegeven dat'.

In de figuur is dit het gebied onder de normaalkromme tussen de linkergrenswaarde $L = 165$ en de rechtergrenswaarde $L = 180$. Je hebt de grafische rekenmachine of Excel nodig om dergelijke kansen te kunnen berekenen: de vuistregels zijn te beperkt.
Bekijk het **Practicum**.

### Opgave 1

Bekijk het histogram van de lengteverdeling van de soldaten in de **Uitleg**.

**a** Hoeveel is $\text{P}(165 \leq L < 180)$ volgens het histogram? Geef je antwoord als getal tussen 0 en 1.

**b** Werk nu het **Practicum** door om te zien hoe je deze kans met de grafische rekenmachine bepaalt.

**c** Bepaal $\text{P}(165 \leq L < 180 \mid \mu(L) = 182 \text{ en } \sigma(L) = 7)$ met de grafische rekenmachine.

### Opgave 2

Gebruik de lengteverdeling van de soldaten in de **Uitleg**.

**a** Bereken de kans dat een soldaat tussen 166 en 177 centimeter lang is.

**b** Bereken hoeveel procent van de soldaten kleiner dan 166 centimeter is.

**c** Bereken hoeveel procent van de soldaten langer dan 192 centimeter is.

### Opgave 3

Bekijk de lengteverdeling van de soldaten in de **Uitleg**.

**a** Controleer de vuistregels met behulp van de grafische rekenmachine.

**b** Hoeveel procent van de soldaten heeft volgens de normaalkromme een lengte die minder dan drie standaardafwijkingen van het gemiddelde afwijkt?
Noteer je antwoord met één decimaal.

# Theorie en voorbeelden

## Om te onthouden

**Bekijk de applet.**

Continue kansvariabelen zoals het gewicht van appels, de lengte van een grote groep mensen, vulgewichten van literpakken, en dergelijke zijn vaak **normaal verdeeld**. Je spreekt dan van een **normale kansvariabele** of **normale statistische variabele**.

De wiskundige Gauss (1777—1855) vond een formule voor de grafiek van de bijpassende normaalkromme of gausskromme. Deze ‘Gausskromme’ of ‘normaalkromme’ wordt bepaald door het gemiddelde $\mu$ en de standaardafwijking $\sigma$ van de verdeling. In de grafische rekenmachine is de formule voor die normaalkromme geprogrammeerd. Daarmee kun je de normaalkromme schetsen en de bijbehorende kansen berekenen, ook als die niet met de vuistregels zijn te bepalen.

De kans die wordt weergegeven door de gekleurde oppervlakte noteer je als:
$\text{P}(165 \leq L < 180 \mid \mu(L) = 182 \text{ en } \sigma(L) = 7)$

Hierin betekent het verticale streepje: ‘gegeven dat’.

Omdat $\text{P}(L = 165) = 0$ is die kans hetzelfde als $\text{P}(165 < L < 180)$.

Als je wilt berekenen wat de kans is dat iemand afgerond een lengte heeft van 165 centimeter, dan moet je $\text{P}(164{,}5 < X < 165{,}5)$ berekenen.

Hanteer de afspraak dat je bij een normale verdeling geen rekening houdt met afrondingen, tenzij duidelijk in de vraagstelling naar voren komt dat dit moet.

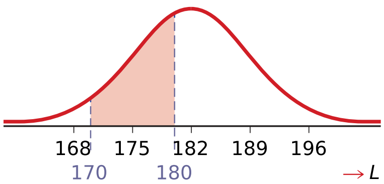
Hoe je dit op de grafische rekenmachine invoert, zie je in het **Practicum**.
Hoe je dit met Excel doet, zie je ook in het **Practicum**.

## Voorbeeld 1

**Bekijk de applet.**

De lengte $L$ van een groep soldaten is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 182$ centimeter en een standaardafwijking van $\sigma = 7$ centimeter.

Bereken $\text{P}(170 < L < 180)$, $\text{P}(L < 180)$, $\text{P}(L = 180)$ en bereken het percentage soldaten dat langer is dan 1,75 meter.

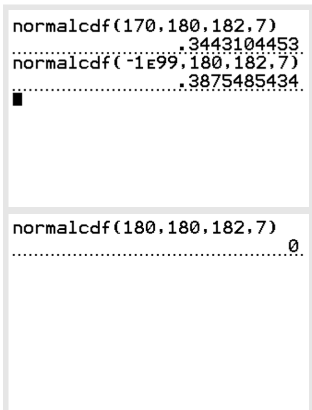


Figuur 4

Antwoord

Al deze kansen zijn met de grafische rekenmachine te vinden.
Bekijk het **Practicum**.

- $\text{P}(170 < L < 180) \approx 0{,}3443$
- $\text{P}(L < 180) \approx 0{,}3875$
- $\text{P}(L = 180) = 0$
- ‘Bereken het percentage soldaten dat langer is dan 1,75 meter’ kun je vertalen naar:
  $\text{P}(L > 175 \mid \mu = 182 \text{ en } \sigma = 7) \approx 0{,}8413$. Dat is gelijk aan ongeveer 84,13%.



Figuur 5

## Opgave 4

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

**a** Wat betekent $\mathrm{P}(162 < L < 178)$ in dit verband?

**b** Hoeveel procent van de soldaten heeft een lengte tussen 171 en 178 centimeter?

**c** Hoeveel procent van de soldaten heeft een lengte van precies 171 centimeter?

**d** Hoeveel procent van de soldaten van deze kazerne heeft een lengte vanaf $\mu - 1{,}5 \cdot \sigma$ tot $\mu + 1{,}5 \cdot \sigma$?

## Opgave 5

Het gewicht $G$ van een bepaalde appelsoort is normaal verdeeld met een gemiddelde van 150 gram en een standaardafwijking van 17 gram.

**a** Hoe groot is de kans dat een appel van deze soort minder dan 140 gram weegt?

**b** Hoeveel procent van deze appels heeft een gewicht dat minder dan 10 gram afwijkt van het gemiddelde?

Een groenteboer heeft nog 340 van deze appels.

**c** Hoeveel daarvan zijn lichter dan 120 gram?

Een klant koopt een zak met vijf appels van de groenteboer.

**d** Hoe groot is de kans dat minstens vier appels lichter zijn dan 120 gram?

## Opgave 6

Bioloog Peter Adriaanse heeft van 1000 koolwitjes de spanwijdte van de vleugels gemeten. Hij vond dat deze spanwijdte ongeveer normaal is verdeeld met een gemiddelde van 5,2 centimeter en een standaardafwijking van 0,8 centimeter.

Figuur 6

**a** Hoeveel procent van de gemeten koolwitjes had een spanwijdte van meer dan 6 centimeter?

**b** Hoeveel van de gemeten koolwitjes hadden een spanwijdte tussen de 5 en de 6 centimeter?

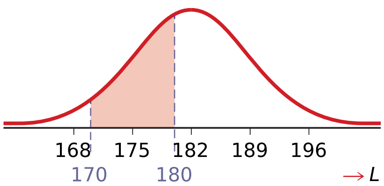
**c** Hoe groot is de kans op een koolwitje met een spanwijdte van minstens 6,5 centimeter?

## Voorbeeld 2

**Bekijk de applet: Normale verdeling**

De lengte $L$ van een groep soldaten is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu(L) = 182$ cm en een standaardafwijking van $\sigma(L) = 7$ cm.

Welke lengtes hebben de 20% langste soldaten in deze groep?



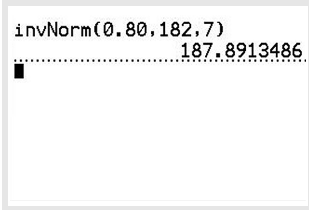

Figuur 7

Antwoord

Vertaal deze vraag in: bereken grenswaarde $g$ als $\mathrm{P}(L > g) = 0{,}20$.

De grafische rekenmachine heeft hiervoor een speciale functie. Die stelt je in staat om vanuit een gegeven kans de grenswaarde terug te vinden. Alleen is die functie ingesteld op 'kleiner-of-gelijk'-kansen.

Omdat $\text{P}(L > g) = 0{,}20$ betekent dat $\text{P}(L < g) = 1 - \text{P}(L > g) = 0{,}80$ kun je die functie hier toch gebruiken.
De uitkomst is: $g = 187{,}9$.
De 20% langste soldaten zijn 187,9 cm of langer.




Figuur 8

### Opgave 7

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 2**.

**a** Welke lengtes hebben de 20% kleinste soldaten in deze groep?

**b** 10% van de soldaten zit boven het gemiddelde, maar is toch niet langer dan $a$ centimeter. Bereken $a$.

### Opgave 8

Ga uit van de normaal verdeelde lengtes van de soldaten. De gemiddelde lengte is 182 centimeter en de standaardafwijking is 7. Men besluit voor deze 1200 soldaten T-shirts aan te schaffen in drie maten: S (small), M (medium) en L (large). Deze maten worden zo gemaakt dat elke maat precies voor $\frac{1}{3}$ deel van de soldaten geschikt is.

**a** Voor welke lengtes is maat S geschikt?

**b** Voor welke lengtes is maat M geschikt?

### Opgave 9

Het aantal branduren $U$ van een bepaald soort lamp is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 950$ uur en een standaardafwijking van $\sigma = 120$ uur.

**a** Bereken hoeveel uur de 10% langst brandende lampen minimaal branden.

**b** Bereken hoeveel uur de 25% kortst brandende lampen branden.

### Opgave 10

De vulgewichten $G$ van kilopakken meel zijn normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 1004$ gram en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ gram.

**a** Hoeveel procent van de pakken is te licht (minder dan 1000 gram)? Rond af op één decimaal.

**b** Omdat de fabrikant uit kostenoverweging ook niet teveel meel in de pakken wil doen, eist hij dat hoogstens 1% van de pakken een gewicht heeft van meer dan 1011 gram mag hebben.
Is er voldaan aan de eis van de fabrikant?

**c** Hoeveel wegen de 5% lichtste pakken suiker hoogstens? Rond af op gehele grammen.

## Verwerken

### Opgave 11

Bereken de volgende kansen. Rond af op vier decimalen.

**a** $\text{P}\,(L < 174 \mid \mu(L) = 178 \text{ en } \sigma(L) = 5)$

**b** $\text{P}\,(3 < X < 5 \mid \mu(X) = 4{,}3 \text{ en } \sigma(X) = 1{,}2)$

**c** $\text{P}\,(Y > 1200 \mid \mu(Y) = 1180 \text{ en } \sigma(Y) = 113)$

## Opgave 12

Een vulmachine vult kilopakken rijst. Het ingestelde vulgewicht van de machine komt overeen met het gemiddelde gewicht van de pakken rijst. De gewichten zijn normaal verdeeld. Het gemiddelde gewicht van een pak rijst is 1010 gram en de standaardafwijking is 9 gram.

**a** Hoeveel procent van de pakken weegt minder dan 1000 gram?

**b** Hoeveel procent van de pakken weegt meer dan 1000 gram?

**c** Bereken in vier decimalen de kans dat een pak meer dan 5 gram zwaarder is dan het gemiddelde.

**d** Hoeveel procent van de pakken is meer dan 20 gram te zwaar?

## Opgave 13

De gemiddelde hoeveelheid neerslag per jaar in een tropisch regenwoud is normaal verdeeld met een gemiddelde van 3350 mm en een standaardafwijking van 400 mm.

**a** Hoeveel keer per eeuw zal er naar verwachting meer regen vallen dan 3600 mm per jaar?

**b** Men noemt een jaar in het tropisch regenwoud extreem nat als er gemiddeld meer dan 4000 mm regen valt.
Bereken in vier decimalen de kans op zo'n extreem nat jaar.

**c** Wat kun je zeggen over de gemiddelde hoeveelheid regen van de vier meest natte jaren van de afgelopen 50 jaar?

## Opgave 14

Jan van Heteren heeft de beschikking over twee auto's.
Het aantal kilometers dat Jan kan rijden is bij beide auto's normaal verdeeld.
Met auto A kan Jan, met een volle tank, gemiddeld 512 km rijden met een standaardafwijking van 24 km.
Met auto B is dat gemiddeld 506 km met een standaardafwijking van 33 km.
Jan moet voor een reis 540 km rijden. Hij wil maar één keer tanken.
Met welke auto kan Jan het beste gaan?

## Opgave 15

Het vulvolume $V$ van een pak melk is normaal verdeeld met een gemiddelde van 1,02 liter en een standaardafwijking van 0,015 liter. De consument verwacht 1 liter melk te kopen.

**a** Hoeveel procent van de melkpakken bevat minder dan 1 liter melk?

**b** Hoeveel procent van de melkpakken bevat meer dan 1,03 liter melk?

**c** Je koopt zo’n melkpak. Bereken in vier decimalen de kans dat er minstens 2 centiliter te weinig melk in je pak zit?

**d** Hoeveel procent van de melkpakken bevat afgerond op twee decimalen 1 liter?

**e** 5% van de melkpakken heeft een vulvolume van minder dan $g$ liter. Bereken $g$ op drie decimalen nauwkeurig.

**f** Hoeveel liter melk bevat een melkpak dat hoort bij de volste 10% melkpakken minstens? Rond af op twee decimalen.

## Opgave 16

Net als bij veel bedrijven in Nederland blijft het salaris van vrouwen ook bij bedrijf ‘Comdie’ achter bij dat van de mannen (met dezelfde functie).
Het salaris van zowel de vrouwelijke als de mannelijke werknemers is normaal verdeeld.
Het gemiddelde salaris van de vrouwen is € 3350,00 met een standaardafwijking van € 450,00.
Dat van de mannen is gemiddeld € 3700,00 met een standaardafwijking van € 400,00.

Bereken hoeveel procent van de vrouwelijke werknemers bij ‘Comdie’ minder verdient dan de 20% minst verdienende mannelijke werknemers.

## Toepassen

### Opgave 17: Nationale wiskundewedstrijd

Een nationale wiskundewedstrijd wordt voor de derde keer georganiseerd. Het maximaal aantal punten dat je bij deze wedstrijd kunt halen is 36.
Je mag ervan uitgaan dat de scores van de deelnemers bij de eerste twee edities normaal verdeeld waren.
Het eerste jaar was het gemiddelde 21,9 punten met een standaardafwijking van 5,4 punten.
Het tweede jaar was het gemiddelde 19,2 punten en de standaardafwijking 5,9 punten.

**a** Hoeveel procent van de deelnemers had het eerste jaar meer dan 20 punten?

**b** Jasmijn is erg goed in wiskunde. Beide jaren heeft ze met de wedstrijd meegedaan. Ze had het eerste jaar 29 punten en het tweede jaar 28. Alhoewel haar tweede score iets lager is dan de eerste vindt zij toch dat ze de wedstrijd het tweede jaar beter heeft gedaan. Ben je het met haar eens?

**c** Er wordt nu alleen gekeken naar de groep deelnemers die beide jaren van de partij waren.
Bereken in drie decimalen de kans dat een willekeurige deelnemer uit deze groep in beide jaren een score had van minstens 22 punten.

### Opgave 18: Kasteeltuin

Een tuinarchitect plant in het voorjaar 500 nieuwe plantjes in een kasteeltuin.
Hij weet dat de levensduur van deze plantjes normaal verdeeld is met een gemiddelde van 85 dagen en een standaardafwijking van 22 dagen.
Na 55 dagen gaat hij alle planten controleren en vervangt degenen die dood zijn gegaan door nieuwe plantjes van dezelfde soort.
Na 120 dagen (vanaf het begin gerekend) doet hij dat weer.
Hoeveel planten zal hij naar verwachting de tweede keer moeten vervangen?

## Testen

### Opgave 19

Een zakje Cup-a-Soup moet 17 g bevatten. Het gewicht van zakjes is normaal verdeeld. De vulmachine is zo ingesteld dat het vulgewicht 19 g bedraagt met een standaardafwijking van 1,5 g. Het vulgewicht komt overeen met het gemiddelde gewicht.

**a** Hoe groot is de kans dat een zakje minder dan 17 g weegt?

**b** Hoe groot is de kans dat een zakje Cup-a-Soup meer dan 17 g weegt?

**c** Hoeveel weegt 90% van deze zakjes op zijn hoogst?

**d** Hoeveel weegt 90% van deze zakjes op zijn minst?


Figuur 9

### Opgave 20

Bij een groep van 1000 mannen is de bloeddruk normaal verdeeld met een gemiddelde van 128,5 mm Hg met een standaardafwijking van 12,5 mm Hg.

**a** Hoeveel mannen hebben een bloeddruk die meer dan drie keer de standaardafwijking afwijkt van de gemiddelde bloeddruk?

**b** Hoeveel procent van de mannen heeft een bloeddruk van meer dan 150?

**c** Hoeveel bedraagt de bloeddruk van de 10% mannen met de hoogste bloeddruk?

## Practicum

Met de volgende practica kun je zien hoe je normale kansen berekent met de **grafische rekenmachine**. Doe alleen de onderdelen die betrekking hebben op de normale verdeling.

- **Kansverdelingen met de TI84**
- **Kansverdelingen met de TInspire**
- **Kansverdelingen met de Casio**
- **Kansverdelingen met de HP-prime**
- **Kansverdelingen met de NumWorks**

Maar je kunt ook heel goed normale kansen berekenen met behulp van **Excel**. Bekijk daartoe het practicum:

- **Normale verdeling**

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.