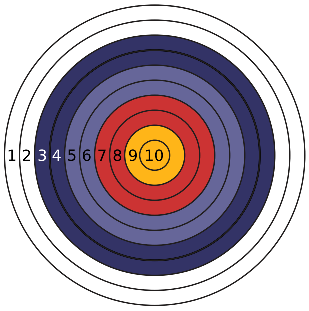
4.5 Wortel-n-wet

Inleiding

Je hebt al eerder gezien dat je een kansverdeling kunt opstellen voor het boogschieten met één pijl op dit bord. Maar vaak schiet je vaker, bijvoorbeeld 20 keer, en kijk je naar het totaal aantal punten of het gemiddelde aantal punten. En hoe zit het dan met de verwachting en de standaarddeviatie?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met een herhaling van steeds dezelfde stochast;
- regels voor de verwachting en de standaardafwijking van een herhaling van stochasten.

Voorkennis

- een kansverdeling opstellen bij een stochast;
- de regels voor de verwachting en de standaarddeviatie van de som van twee stochasten.

Verkennen

Opgave V1

Je schiet 10 keer op een rond bord (0, 1, 2, ..., 10 punten te behalen)
Je kansverdeling per schot is:

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(Y=y)$	0,01	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,06	0,11	0,21	0,22	0,23

Tabel 1

Je kent de regels voor de verwachting en de standaardafwijking van de som van twee stochasten.

a Hoeveel punten T verwacht je in totaal te scoren? En welke standaardafwijking hoort er bij dit totaal? Rond af op twee decimalen.

b Hoeveel punten G verwacht je bij deze tien schoten gemiddeld per schot te scoren? En welke standaardafwijking hoort daar bij? Rond af op twee decimalen.

Uitleg

Een boogschieter schiet 20 keer op een rond bord (0, 1, 2, ..., 10 punten te behalen).
Zijn kansverdeling per schot is:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=x)$	0,02	0,02	0,04	0,10	0,09	0,11	0,12	0,12	0,15	0,15	0,08

Tabel 2

De verwachting per schot is 6,22 punten met een standaardafwijking van ongeveer 2,56 punten.

De stochast X is het aantal punten dat de boogschutter behaalt met één keer schieten. De stochast T is het totaal aantal punten bij 20 herhalingen. Omdat elk schot onafhankelijk is van het voorgaande, kun je zowel de optelregel voor verwachtingswaarden als die voor varianties toepassen:
$\text{E}(T) = \text{E}(X + X + ... + X) = \text{E}(X) + \text{E}(X) + ... + \text{E}(X) = 20 \cdot \text{E}(X)$
en
$\text{Var}(T) = \text{Var}(X + X + ... + X) = \text{Var}(X) + \text{Var}(X) + ... + \text{Var}(X) = 20 \cdot \text{Var}(X)$

Dus bij het totaal van 20 schoten is:

- de verwachtingswaarde $\text{E}(T) = 20 \cdot 6{,}22 = 124{,}4$ punten
- de standaardafwijking $\sigma(T) = \sqrt{20 \cdot \text{Var}(X)} = \sqrt{20} \cdot \sqrt{(\sigma(X))^2} = \sqrt{20} \cdot \sigma(X) \approx 11{,}45$ punten

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je de stochast X, die staat voor het aantal punten dat de boogschutter haalt per schot op een rond bord. Schiet hij twaalf keer op dit bord, dan heb je het over de stochast $12X$.

a Controleer dat $\text{E}(X) = 6{,}22$ en $\sigma(X) \approx 2{,}56$.

b Hoeveel punten verwacht je dat de boogschutter haalt als hij twaalf keer op dit bord schiet? En wat is dan de standaardafwijking?

c Hoeveel punten verwacht je dat de boogschutter gemiddeld per schot haalt als hij twaalf keer op het bord schiet? En welke standaardafwijking hoort daarbij?

d Ligt het voor de hand dat de standaardafwijking kleiner wordt naarmate de boogschutter vaker op dit bord schiet?

Opgave 2

In een doos zitten vijf balletjes met daarop de getallen 2, 3, 5, 7 en 12.

a Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het getal dat je krijgt bij het aselect trekken van één balletje.

b Je trekt twee balletjes met teruglegging. Bepaal van de gemiddelden van de tweetallen de verwachtingswaarde en de standaardafwijking.

c Welk verband bestaat er tussen de verwachtingswaarden die je bij a en b hebt berekend?

d Laat zien dat je de standaardafwijking bij b ook had kunnen vinden door de standaardafwijking van a te delen door $\sqrt{2}$. Geef hiervoor een verklaring.

Opgave 3

X stelt het aantal ogen op een dobbelsteen voor.

a T stelt het aantal ogen voor als je met twee dobbelstenen werpt. Bereken $\text{E}(T)$ en $\sigma(T)$.

b Welk verband is er tussen $\text{E}(X)$ en $\text{E}(T)$ en tussen $\sigma(X)$ en $\sigma(T)$?

c $\overline{X}$ is het gemiddelde aantal ogen per worp als je met twee dobbelstenen werpt. Bereken $\text{E}\left(\overline{X}\right)$ en $\sigma\left(\overline{X}\right)$.

d Welk verband is er tussen $\text{E}(X)$ en $\text{E}\left(\overline{X}\right)$ en tussen $\sigma(X)$ en $\sigma\left(\overline{X}\right)$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Heb je te maken met n onafhankelijke gelijke kansexperimenten, elk met dezelfde stochast X, dan geldt voor het totaal T van deze n stochasten:

- $\text{E}(T) = n \cdot \text{E}(X)$
- $\sigma(T) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

Voor het bewijs hiervan kun je zowel de optelregel voor verwachtingswaarden als die voor varianties toepassen:

- $\text{E}(T) = \text{E}(X + X ... + X) = \text{E}(X) + \text{E}(X) + ... + \text{E}(X) = n \cdot \text{E}(X)$
- $\text{Var}(T) = \text{Var}(X + X + ... + X) = \text{Var}(X) + \text{Var}(X) + ... + \text{Var}(X) = n \cdot \text{Var}(X)$

Omdat de standaardafwijking gelijk is aan de wortel van de variantie geldt dat:
$\sigma(T) = \sqrt{\text{Var}(T)} = \sqrt{n \cdot \text{Var}(X)} = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

Je noemt deze stelling de **wortel-n-wet**.

Voor de kansverdeling die hoort bij het gemiddelde $\overline{X}$ van n onafhankelijke gelijke kansexperimenten elk met stochast X geldt daarom:

- $\text{E}\left(\overline{X}\right) = \frac{\text{E}(T)}{n} = \frac{n \cdot \text{E}(X)}{n} = \text{E}(X)$
- $\sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma(T)}{n} = \frac{\sqrt{n} \cdot \sigma(X)}{n} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Voorbeeld 1

Op de doosjes paperclips van een bepaald merk staat: circa 100 stuks.
Door tellingen is gebleken dat er in deze doosjes gemiddeld 104,3 paperclips zitten met een standaardafwijking van 3,5. Je haalt 10 doosjes van die paperclips. Hoeveel paperclips mag je dan in totaal verwachten en met welke standaardafwijking? En wat is de standaardafwijking van het gemiddeld aantal paperclips per doosje?

Figuur 2

Antwoord

Neem aan dat het aantal paperclips X in elk doosje niet afhangt van het aantal in de andere doosjes. Dan geldt voor het totaal T van 10 doosjes:

- $\text{E}(T) = 10 \cdot \text{E}(X) = 10 \cdot 104{,}3 = 1043$
- $\sigma(T) = \sqrt{10} \cdot \sigma(X) = \sqrt{10} \cdot 3{,}5 \approx 11{,}1$

Je mag daarom 1043 paperclips verwachten met een standaardafwijking van ongeveer 11,1.

Voor het gemiddelde aantal per doosje $\overline{X}$ geldt:

- $\text{E}\left(\overline{X}\right) = 104{,}3$
- $\sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma(T)}{10} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sigma(X)}{10} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{10}} \approx 1{,}1$

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** gaat het over doosjes paperclips, waarin gemiddeld per doosje 104,3 paperclips zitten met een standaardafwijking van 3,5. Je koopt vijf van die doosjes paperclips.

a Hoeveel paperclips mag je in totaal in de vijf doosjes samen verwachten?

b Hoeveel paperclips mag je gemiddeld per doosje in deze steekproef van vijf doosjes verwachten?

c Welke standaardafwijking heeft het aantal paperclips in deze vijf doosjes samen? Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

d Welke standaardafwijking heeft het gemiddelde aantal paperclips per doosje in deze steekproef van vijf doosjes? Rond af op twee decimalen nauwkeurig

Opgave 5

In een fabriek worden zakken met 1 kg meel gevuld. De zakken hebben een verwacht gewicht van 1002 g met een standaardafwijking van 4 g. De zakken worden op hun beurt verpakt met een plastic folie in pakketten van 10 zakken.

a Bereken het gemiddelde gewicht van deze pakketten.

b Welke standaardafwijking geldt voor het gewicht van deze pakketten? Geef je antwoord in g in twee decimalen nauwkeurig.

c Welke verwachtingswaarde en standaardafwijking geldt voor het gemiddelde gewicht $\overline{X}$ van één zak meel uit zo’n pakket? Rond zo nodig af op g in twee decimalen nauwkeurig.

Op een pallet worden 100 pakketten geplaatst.

d Welk gewicht verwacht je dat op het pallet geplaatst is en welke standaardafwijking geldt hiervoor? Rond zo nodig af op g in twee decimalen nauwkeurig.

e Welke verwachtingswaarde en standaardafwijking gelden voor het gemiddelde gewicht van één zak meel van zo'n pallet?

Verwerken

Opgave 6

Jenna en Iris spelen een zelfbedacht spel met knikkers. Ze pakken het wetenschappelijk aan: op basis van heel vaak spelen hebben ze berekend dat de volgende kanstabel bij het spel hoort:

k	-2	-1	0	2	3
$P(K = k)$	0,0032	0,1634	0,3456	0,2473	0,2405

Tabel 3

Stochast K is het aantal knikkers winst/verlies per keer dat het spel gespeeld wordt.

a Hoe groot is het verwachte aantal knikkers winst/verlies na 35 keer spelen? Welke standaardafwijking hoort daarbij? Rond af op twee decimalen.

b Hoeveel knikkers per spel verwacht je na 35 keer spelen?

Geef ook de bijbehorende standaardafwijking. Rond af op twee decimalen.

Opgave 7

Een bepaald type dvd-recorder wordt in dozen verpakt die een gemiddelde hoogte van 10 cm hebben met een standaardafwijking van 4 mm. Bij een groothandel wordt een aantal van deze dozen in een magazijn opgeslagen.

a Er worden 15 dozen op elkaar geplaatst. Bereken de verwachtingswaarde van de hoogte en geef de bijbehorende standaardafwijking in mm in één decimaal nauwkeurig.

b Bij het vervoer van deze dozen gebruikt men een vrachtwagen met een gemiddelde laadhoogte van 2,5 m en een standaardafwijking van 1,9 cm. Bij het beladen van deze vrachtwagen maakt men stapels van 25 dozen. Welke standaardafwijking mag de hoogte van een doos hebben als de standaardafwijking van de hoogte van de stapel dozen kleiner of gelijk moet zijn aan 1,9 cm?

Opgave 8

Vierkante postzegels kunnen gekocht worden op rollen van 500 zegels. Een rol heeft een lengte van 15 m met een standaardafwijking van 5 mm.

a Welke afmetingen hebben de zegels gemiddeld?

b Hoe groot is de standaardafwijking van de lengte van één zegel in mm? Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

Dezelfde zegels zijn ook verkrijgbaar op vellen van gemiddeld 60 bij 30 cm.

c Welke standaardafwijkingen hebben de zijden van dit soort vellen in mm? Rond indien nodig af op twee decimalen.

Opgave 9

Een tuinder heeft 10000 jonge preiplanten geteeld voor de verkoop. Uit ervaring weet hij dat de kans dat zo'n plantje bij de klant begint te groeien en geoogst kan worden 0,8 is.

a Hoe groot is de kans dat minstens 40 van de 50 planten, die iemand bij deze tuinder voor zijn tuin heeft gekocht, ook echt geoogst kunnen worden? Rond af op drie decimalen nauwkeurig.

b Welk aantal planten mag deze klant verwachten te oogsten? Met welke standaardafwijking? Rond af op twee decimalen.

c Welk aantal planten verwacht de tuinder dat uiteindelijk van zijn totale hoeveelheid kan worden geoogst? Met welke standaardafwijking moet hij rekening houden?

Opgave 10

In een bak met 10000 balletjes is 60% van de balletjes rood, de rest is wit. Laat X de uitkomst van een blinde trekking van een balletje uit de bak zijn, waarbij $X = 0$ als het getrokken balletje wit is en $X = 1$ als het getrokken balletje rood is.

a Er worden in één keer 16 balletjes uit de bak getrokken. Bereken $\text{E}\left(\overline{X}\right)$ en $\sigma\left(\overline{X}\right)$. Rond zo nodig af op vier decimalen. Welke aanname mag je hier doen?

b Hoeveel balletjes moet je trekken zodanig dat $\sigma\left(\overline{X}\right) = 0{,}2$?

Toepassen

Opgave 11: Vaste telefoonlijn ouderwets?

Iemand voert een onderzoek uit naar de leeftijd van mensen die privé een vaste telefoonverbinding hebben.

Hij maakt een binomiale stochast X voor wanneer iemand een vaste telefoon heeft. Hierbij is $X = 0$ als de persoon jonger dan 50 jaar is, en $X = 1$ als de persoon 50 jaar of ouder is. Na een enquête van 500 mensen die een telefoon met een kiesschijf hebben, en wat rekenwerk, komt hij op $\sigma\left(\overline{X}\right) = 0{,}0179$.

a Bereken de kans dat een willekeurige persoon die een vaste telefoonverbinding gebruikt, 50 jaar of ouder is. Rond af op één decimaal. (Als het goed is, krijg je twee antwoorden: beredeneer uit de context welke de juiste is.)

De onderzoeker maakt een wat meer verfijnde stochast Y. Hierbij is $Y = 0$ als de ondervraagde persoon jonger dan 40 jaar is, $Y = 1$ als de persoon tussen de 40 en 60 jaar is, en $Y = 2$ als de persoon 60 jaar of ouder is. Hiermee krijgt hij na wat nieuwe berekeningen $\text{E}\left(\overline{Y}\right) = 1{,}7$ en $\text{Var}\left(\overline{Y}\right) = 0{,}00062$.

b Stel de kansverdeling op voor Y.

Testen

Opgave 12

In een doos zitten vijf kaartjes met daarop de getallen 3, 7, 11 en 15. Er zitten twee kaartjes met een 7 in.

a Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het getal bij het trekken van één kaartje uit de doos. Rond indien nodig af op twee decimalen.

b Er worden nu met terugleggen twee kaartjes getrokken. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van de som van de getallen van de twee getrokken kaartjes. Rond indien nodig af op twee decimalen.

c Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het gemiddelde van de getallen op de twee getrokken kaartjes. Rond indien nodig af op twee decimalen.

Opgave 13

In de maand december zijn er kerstzegels verkrijgbaar. Ze worden in een bepaald jaar aangeboden op een velletje van vier bij vijf zegels. De afmetingen (zonder de randen) van de velletjes zijn 15,5 bij 15,5 cm met een standaardafwijking van 0,75 mm in beide richtingen.

a Bereken de afmetingen van een gemiddelde zegel.

b Bereken de standaardafwijkingen van de afmetingen van een gemiddelde zegel in mm. Rond af op drie decimalen nauwkeurig.

Figuur 3

© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.