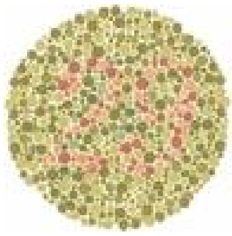
4.3 Binomiale stochasten

Inleiding

Plaatjes zoals dit worden gebruikt om te onderzoeken of iemand kleurenblind is. Kleurenblindheid komt voor bij 8% van de westerse mannen en 0,4% van de westerse vrouwen. Je kunt meer over dit verschijnsel lezen via **www.kleuren-blindheid.nl**



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip Bernoulli-experiment;
- binomiale stochasten en de bijbehorende kansverdelingen opstellen;
- rekenen met binomiale kansen;
- regels voor de verwachting en de standaardafwijking van een binomiale stochast.

Voorkennis

- kansverdelingen opstellen bij stochasten;
- verwachting en standaardafwijking bij een kansverdeling berekenen;
- de regels voor de verwachting en de standaarddeviatie van de som van meerdere stochasten.

Verkennen

Opgave V1

Onder westerse mensen komt kleurenblindheid voor bij 8% van de mannen en 0,4% van de vrouwen. Geef het kleurenblind zijn aan met 1 en niet kleurenblind zijn met 0. De kansvariabele voor jongens is dan J en voor meisjes M.

a Hoe groot is de kans dat er in een klas van de 15 meisjes er 2 kleurenblind zijn?

b Hoe groot is de kans dat er in een klas van 10 jongens en 15 meisjes 2 leerlingen kleurenblind zijn?

Uitleg

Kleurenblindheid komt voor bij 8% van de westerse mannen.
Of iemand kleurenblind is, kun je niet aan zijn uiterlijk zien. Dus iedere westerse man die je tegenkomt, en verder niet kent, heeft voor jou een kans van 0,08 om kleurenblind te zijn. Vraag je een willekeurige westerse man of hij kleurenblind is of niet, dan doe je een kansexperiment met precies twee uitkomsten: X is 0 als hij niet kleurenblind is en 1 als dit wel het geval is. Zo'n kansexperiment heet een Bernoulli-experiment naar de Zwitserse wiskundige **Jakob Bernoulli (1654–1705)**.

De bijbehorende kansverdeling is:

x	0	1
$\text{P}(X = x)$	0,92	0,08

Tabel 1

Je kunt nagaan dat $\text{E}(X) = 0{,}08$ en $\sigma(X) \approx 0{,}271$.

Vraag je tien westerse mannen naar kleurenblindheid, dan voer je het Bernoulli-experiment tien keer uit: je herhaalt tien keer hetzelfde experiment. De bijbehorende stochast is $K = 10X$ en de kans dat er twee kleurenblinden bij zijn, is:

$$\text{P}(K = 2) = 0{,}08^2 \cdot 0{,}92^8 \cdot \binom{10}{2}$$

waarin $\binom{10}{2}$ het aantal mogelijke combinaties van twee uit tien voorstelt.

Dit getal is het aantal mogelijke takken in de bijbehorende kansboom van tien lagen met twee kleurenblinden en acht niet-kleurenblinden.

De kansverdeling voor K kun je als volgt berekenen:

- $\text{P}(K = 0) = 0{,}08^0 \cdot 0{,}92^{10} \cdot \binom{10}{0}$
- $\text{P}(K = 1) = 0{,}08^1 \cdot 0{,}92^9 \cdot \binom{10}{1}$
- $\text{P}(K = 2) = 0{,}08^2 \cdot 0{,}92^8 \cdot \binom{10}{2}$
- ...
- $\text{P}(K = 10) = 0{,}08^{10} \cdot 0{,}92^0 \cdot \binom{10}{10}$

Bij deze kansverdeling kun je snel de verwachting en de standaardafwijking berekenen:
$\text{E}(K) = \text{E}(10X) = 10\,\text{E}(X) = 10 \cdot 0{,}08 = 0{,}8$
en
$\sigma(K) = \sigma(10X) = \sqrt{10} \cdot \sigma(X) \approx \sqrt{10} \cdot 0{,}271 \approx 0{,}86$.

Opgave 1

Bekijk de stochast X in de **Uitleg**.

a Laat zien dat $\text{E}(X) = 0{,}08$ en $\sigma(X) \approx 0{,}27$.

b Leg uit waarom $K = 10X$ de som van 10 onafhankelijke Bernoulli-experimenten is.

c Bereken $\text{P}(K = 4)$.

d Leg uit waarom $\sigma(K) = \sqrt{10} \cdot \sigma(X)$.

Opgave 2

Onder de westerse vrouwen is 0,4% kleurenblind. De stochast Y hoort bij de kleurenblindheid van één westerse vrouw.

a Bereken de verwachtingswaarde en standaardafwijking van Y in drie decimalen nauwkeurig.

b Je vraagt aan 100 westerse vrouwen of ze kleurenblind zijn of niet. Hierbij hoort de stochast $L = 100Y$.

Bereken $\text{E}(L)$ en $\sigma(L)$. Rond indien nodig af op twee decimalen.

Opgave 3

Je werpt met twee dobbelstenen en bepaalt na de worp de som van het aantal bovenliggende ogen. De stochast X geeft aan of het aantal ogen zeven is of niet:

- $X = 0$ betekent dat je geen zeven ogen gooit.
- $X = 1$ betekent dat je zeven ogen gooit.

a Stel een kansverdeling voor X op.

b Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van X exact.

Je gooit nu twaalf keer met twee dobbelstenen. Je let op het aantal keren A dat je zeven ogen gooit.

c Hoe groot is de kans dat je drie keer zeven ogen gooit, dus hoe groot is $\text{P}(A = 3)$? Rond af op vier decimalen.

d Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van A. Rond af op twee decimalen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **Bernoulli-experiment** is een kansexperiment met precies twee uitkomsten: ‘succes’ of ‘mislukking’. Daarbij hoort een stochast B die de waarde 0 of 1 heeft. Je kunt er daarom de volgende kansverdeling bij opstellen:

b	0	1
$\text{P}(B = b)$	$q = 1 - p$	p

Tabel 2

Als je een Bernoulli-experiment n keer herhaalt en stochast X stelt het aantal successen daarbij voor, dan heeft X een **binomiale kansverdeling**. Een binomiaal kansexperiment bestaat dus uit n gelijke onafhankelijke experimenten met elk precies twee uitkomsten.

De kans op k successen is: $\text{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Ook nu is p de kans op ‘succes’ en verder is $0 \leq k \leq n$.
De variabelen n en p noem je de **parameters** van de binomiale verdeling.

Voor een binomiaal verdeelde stochast met parameters n en p geldt:

- de **verwachtingswaarde** is: $\text{E}(X) = n \cdot p$
- de **variantie** is: $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$
- de **standaardafwijking** is: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Voorbeeld 1

Je gooit met tien dobbelstenen. Hoe groot is de kans dat er vier zessen boven komen te liggen? En hoe groot is de kans dat er hoogstens vier zessen boven komen te liggen?

Antwoord

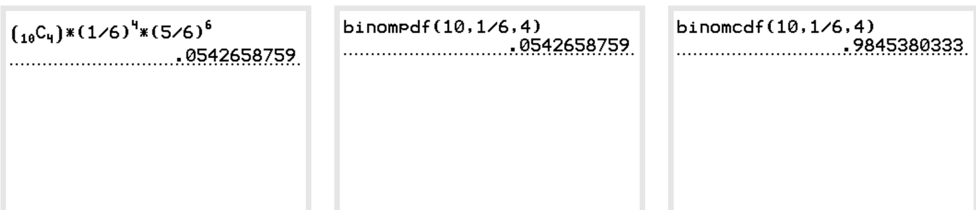
Het aantal zessen dat boven komt, is een binomiale stochast X met parameters $n = 10$ en $p = \frac{1}{6}$.

De gevraagde kans is: $\text{P}\left(X = 4 | n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right)$.

Je kunt deze kans zelf berekenen:

$\text{P}\left(X = 4 | n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right) =$

$= \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}0543.$



Figuur 2

De grafische rekenmachine kan deze kans ook in één keer voor je berekenen, zie het **Practicum**. Dat is zeker handig als je de kans op hoogstens 4 zessen wilt weten. Want in plaats van de kansen voor $X = 0,1,2,3,4$ afzonderlijk te berekenen en dan op te tellen, kan de grafische rekenmachine dit in één keer.

De kans op hoogstens 4 zessen is: $\text{P}\left(X \leq 4 | n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right) \approx 0{,}9845$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** wordt met tien dobbelstenen geworpen en let je op het aantal zessen X dat boven komt.

a Waarom is X een binomiale stochast?

b Bereken $\text{P}(X = 6)$. Bereken deze kans met de hand en met behulp van de grafische rekenmachine. Rond in beide gevallen af op vier decimalen.

c Bereken de kans dat er hoogstens zes zessen boven komen te liggen. Rond af op vier decimalen.

Opgave 5

Er wordt dertig keer met een zuivere dobbelsteen gegooid. Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat er:

a precies vijf keer een zes wordt geworpen.

b bij hoogstens tien worpen een 1 of 2 boven komt.

Voorbeeld 2

Je gooit met tien dobbelstenen. Stochast X geeft het aantal zessen aan dat boven komt te liggen. Stel een kansverdeling op voor X en bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking.

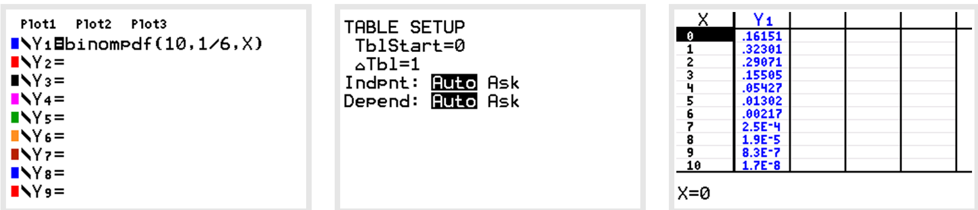
Antwoord

X is een binomiale stochast met parameters $n = 10$ en $p = \frac{1}{6}$.

Je moet nu de kansen bepalen voor $X = 0,1,2,3,...,10$.

Het gaat om kansen van de vorm $\text{P}\left(X = x | n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right)$.

Voer je dit op de grafische rekenmachine als functie in, dan kan de grafische rekenmachine de kansverdeling voor je maken.



Figuur 3

De verwachtingswaarde is: $\text{E}(X) = n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{6} = 1\frac{2}{3}$ zessen.

De standaardafwijking is: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 1{,}2$ zessen.

Opgave 6

Een willekeurig schot van een ervaren boogschutter komt één van de vijf keer in de roos terecht. Jozef, een ervaren boogschutter, schiet vijftien keer op een doelwit. Stochast X is het aantal keren dat Jozef in de roos schiet.

a Stel een kansverdeling op voor X.

b Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van stochast X. Rond indien nodig af op twee decimalen.

Voorbeeld 3

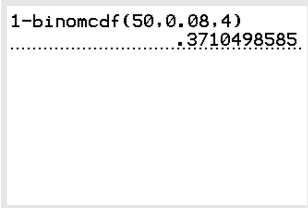
Uit onderzoek blijkt dat 8% van de westerse mannen kleurenblind is.
Je vraagt 50 willekeurig gekozen westerse mannen of ze kleurenblind zijn.
Hoeveel kleurenblinde mannen verwacht je in jouw steekproef aan te treffen?
Hoe groot is de kans dat je meer dan vier kleurenblinde mannen in je steekproef aantreft?

Antwoord

Stel stochast K is het aantal kleurenblinde mannen in de steekproef.
K is binomiaal verdeeld met parameters $n = 50$ en $p = 0{,}08$.

De verwachtingswaarde is: $\text{E}(K) = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}08 = 4$ mannen

De kans op $K > 4$ kun je zo opschrijven: $\text{P}(K > 4 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}08)$.
Deze kans is gelijk aan: $1 - \text{P}(K \leq 4 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}08)$.
De grafische rekenmachine kan die kans voor je berekenen:
$\text{P}(K > 4 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}08) = 1 - \text{P}(K \leq 4 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}08) \approx 0{,}3710$



Figuur 4

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** zie je dat 8% van de westerse mannen kleurenblind is en dat er een steekproef van 50 willekeurige westerse mannen wordt genomen.

a Bereken de kans op precies zes kleurenblinden in de groep van 50.

b Bereken de kans op hoogstens zes kleurenblinden in de groep van 50.

c Bereken de kans op minstens zes kleurenblinden in de groep van 50.

Opgave 8

Een aantal mensen wordt ieder jaar ingeënt tegen griep. Van een bepaalde entstof weet men dat acht van de tien mensen geen griep krijgen. Een huisarts vaccineert vier patiënten (A, B, C en D) met deze entstof.

a Hoeveel patiënten zullen naar verwachting geen griep krijgen?

b Bepaal de kans dat geen van de vier patiënten griep krijgt.

c Bepaal de kans dat de patiënten A en B geen griep krijgen en C en D wel.

d Bepaal de kans dat twee van de vier patiënten griep krijgen.

e Bepaal de kans dat hoogstens twee van de vier patiënten griep krijgen.

Opgave 9

Neem aan dat stochast X binomiaal verdeeld is. Bepaal de kansen in vier decimalen nauwkeurig.

a $\text{P}(X \leq 8 | n = 15 \text{ en } p = 0{,}15)$

b $\text{P}(X \leq 9 | n = 55 \text{ en } p = 0{,}35)$

c $\text{P}(42 \leq X \leq 54 | n = 100 \text{ en } p = 0{,}45)$

d $\text{P}\left(X \leq 2 \text{ of } X \geq 5 | n = 8 \text{ en } p = \frac{1}{3}\right)$

e $\text{P}(X > 8 | n = 16 \text{ en } p = 0{,}15)$

Verwerken

Opgave 10

Iemand vult bij een meerkeuzetoets volkomen willekeurig 32 keer een van de vier antwoordmogelijkheden in. Er is telkens maar één van deze keuzemogelijkheden juist. De toets wordt met een voldoende beoordeeld als er meer dan 16 vragen juist zijn ingevuld.

a Bepaal het aantal verwachte correcte antwoorden van de gokker.

b Bepaal de kans dat de gokker een voldoende haalt, in vier decimalen nauwkeurig.

c Bepaal de standaardafwijking van het aantal goed gegokte antwoorden, in vier decimalen nauwkeurig.

Opgave 11

Neem aan dat stochast X binomiaal verdeeld is. Bepaal de kansen in vier decimalen nauwkeurig.

a $\text{P}(X \leq 6 | n = 20 \text{ en } p = 0{,}45)$

b $\text{P}(X > 8 | n = 15 \text{ en } p = 0{,}35)$

c $\text{P}(X \geq 46 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}85)$

d $\text{P}(X \leq 5 | n = 25 \text{ en } p = 0{,}25)$

e $\text{P}(X < 16 | n = 30 \text{ en } p = 0{,}45)$

Opgave 12

Een volledig kaartspel bestaat uit 52 kaarten, van elke soort (ruiten, harten, klaveren en schoppen) evenveel. Uit zo'n kaartspel wordt zes keer een kaart getrokken. De kaart die je trekt, wordt steeds in het spel teruggestopt alvorens een nieuwe kaart te nemen. Het spel kaarten wordt voor elke trekking geschud.

a Hoe groot is dan de kans op hoogstens drie hartenkaarten? Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

b Hoe groot is de kans dat je meer dan drie hartenkaarten trekt? Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

c Hoe groot is de kans dat je hoogstens twee zwarte kaarten trekt? Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

d Je hebt de voorgaande kansen kunnen opvatten als een binomiaal kansmodel. Waarom kan dat niet als je de getrokken kaarten niet teruglegt?

Opgave 13

X is een binomiaal verdeelde toevalsvariabele. Bepaal telkens de waarde(n) van x waarvoor deze ongelijkheden gelden. Rond zo nodig af op drie decimalen.

a $\text{P}(X \leq x | n = 18 \text{ en } p = 0{,}45) < 0{,}7473$

b $\text{P}\left(X > x | n = 12 \text{ en } p = \frac{1}{3}\right) < 0{,}0188$

c $\text{P}(X \geq 4 | n = x \text{ en } p = 0{,}20) < 0{,}04$

d $\text{P}(X = 3 | n = x \text{ en } p = 0{,}25) < 0{,}25$

e $\text{P}(X \geq 10 | n = 50 \text{ en } p = x) < 0{,}2$

f $\text{P}(X = 4 | n = 9 \text{ en } p = x) > 0{,}2$

Opgave 14

Neem aan dat 80% van de Nederlandse bevolking elke week aardappels eet.

a Hoe groot is de kans dat bij een groep van 20 Nederlanders hoogstens 2 personen zijn die niet elke week aardappels eten? Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

b Stel dat de kans dat in een groep Nederlanders minder dan 2 personen zijn die niet elke week aardappels eten, kleiner is dan 12,5%. Hoe groot kan die groep dan zijn?

Opgave 15

Van een binomiaal verdeelde stochast X is de verwachtingswaarde $2\frac{2}{3}$. De variantie is $1\frac{7}{9}$.

Bereken $\text{P}(X = 4)$ in vier decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 16: Meerkeuzetoets

Een meerkeuzetoets bestaat uit 50 vragen, elk met vier mogelijke antwoorden, waarvan er slechts één juist is.

De docente die deze toets heeft gemaakt, wil de normering ervan vaststellen. De cijfers worden tot op één decimaal nauwkeurig berekend; het laagst mogelijke cijfer is 1,0 en het hoogst mogelijke cijfer een 10,0. Zij wil bij het vaststellen van het cijfer het gokken van antwoorden zo min mogelijk belonen.

a Ze zou er daarom voor kunnen kiezen om het aantal verwachte goede antwoorden bij zuiver gokken niet te belonen. Verder werkt ze met een vast aantal punten per vraag. Welke normering zou ze dan het beste kunnen hanteren?

b Zij kan ook besluiten dat bij willekeurig invullen de kans op het cijfer 4,0 of hoger bij benadering niet meer dan 3% mag zijn. Voor hoeveel goede antwoorden wordt dan het cijfer 4,0 gegeven?

c Is de tweede methode soepeler dan de eerste? Licht je antwoord toe.

Ga er nu van uit dat er een lineaire puntenverdeling wordt gehanteerd:

- bij 0 tot 5 vragen goed krijg je een 1,0;
- bij 6 vragen goed krijg je een 1,2;
- bij 7 vragen goed krijg je een 1,4;
- ...;
- bij 50 vragen goed een 10,0.

d Mara weet op 30 vragen het goede antwoord en besluit de rest van de vragen op goed geluk in te vullen. Welk cijfer kan ze verwachten?

e Bereken de kans dat Mara een 7,6 of meer scoort. Rond af op vier decimalen.

f Bij n zeker goede antwoorden en de overige vragen willekeurig invullen is de kans op minstens 7,0 groter dan 90%. Bereken n.

Testen

Opgave 17

Je werpt 10 keer met een zuiver geldstuk. Stochast K geeft het aantal keren kruis bij deze worpen.

a Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van stochast K.

Stochast L geeft het aantal keren kruis als je 1000 keer gooit.

b Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van L.

Opgave 18

Een test bestaat uit 15 vierkeuzevragen. Slechts bij 5 van deze vragen kun je met zekerheid het goede antwoord aangeven. Je besluit de 10 andere vragen op goed geluk een antwoord aan te geven.

a Hoe groot is de kans dat je 12 vragen van de test het goede antwoord hebt gegeven?

b Hoe groot is de kans dat je meer dan 5 vragen goed beantwoordt?

c Hoeveel vragen van de test mag je verwachten goed te beantwoorden?

Opgave 19

In het casino mag je voor € 10,00 met tien zuivere dobbelstenen werpen. Voor iedere dobbelsteen waar je minder dan 4 ogen mee gooit krijg je € 2,00 uitbetaald.
Hoe groot is de kans dat je winst maakt bij dit spel?

Practicum

Met de grafische rekenmachine kun je **kansen bepalen bij een binomiaal verdeelde stochast**. Bekijk:

- **Kansverdelingen met de TI84**
- **Kansverdelingen met de TInspire**
- **Kansverdelingen met de Casio**
- **Kansverdelingen met de HP-prime**
- **Kansverdelingen met de NumWorks**

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.