4.2 Stochasten optellen

Inleiding

Bij het spel 'darts' is het aantal punten dat je scoort bij het werpen met een pijltje een stochast. Met behulp van statistieken kun je voor een speler een bijpassende kansverdeling maken. Maar in het spel gooi je per beurt met drie darts. Hoe kun je de kansverdeling voor een beurt opstellen vanuit de kansverdeling voor één worp?
Op deze manier winstkansen berekenen is nog heel ingewikkeld, want het spel gaat om gewonnen 'sets', waarbij elke 'set' weer bestaat uit 'legs' die elk uit een vooraf onbekend aantal beurten bestaan. Zoek de spelregels maar eens op.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip som van twee of meer stochasten;
- kansverdelingen opstellen voor de som van stochasten;
- regels voor de verwachting en de standaardafwijking van de som van stochasten.

Voorkennis

- kansverdelingen opstellen bij een stochast;
- verwachting en standaardafwijking bij een kansverdeling berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Gooi je met een dobbelsteen dan is het aantal ogen dat bovenkomt een stochast X. Gooi je met twee dobbelstenen, dan heb je voor de som van het aantal ogen dat bovenkomt te maken met een stochast Y.

a Laat zien dat in dit geval $\text{E}(Y) = 2 \cdot \text{E}(X)$.

b Bestaat er een dergelijk verband tussen $\text{Var}(X)$ en $\text{Var}(Y)$?

c Bestaat er ook een dergelijk verband tussen $\sigma(X)$ en $\sigma(Y)$?

Uitleg

Iemand doet aan twee kansspelen mee. Bij het eerste spel kan hij 2, 4 of 6 punten verdienen, bij het tweede spel 0 of 10 punten. X is de stochast voor het aantal punten bij het eerste spel en Y die voor het tweede spel. Op grond van voorgaande resultaten heeft hij deze kansverdelingen opgesteld.

x	2	4	6
$\text{P}(X = x)$	0,20	0,30	0,50

y	0	10
$\text{P}(Y = y)$	0,40	0,60

Tabel 1

Voor de wedstrijd moeten de scores van beide spelen worden opgeteld. Daarbij past deze kansverdeling:

$x + y$	2	4	6	12	14	16
$\text{P}(X + Y = x + y)$	0,08	0,12	0,20	0,12	0,18	0,30

Tabel 2

Je kunt nu zelf nagaan dat: $\text{E}(X) = 4{,}6$, $\text{E}(Y) = 6$ en $\text{E}(X + Y) = 10{,}6$.

Hier geldt dus dat de verwachtingswaarde van $X + Y$ gelijk is aan de som van de afzonderlijke verwachtingswaarden.

Ook kun je nagaan dat: $\text{Var}(X) = 2{,}44$ en $\text{Var}(Y) = 24$ en $\text{Var}(X+Y) = 26{,}44$.
Ook de variantie van $X+Y$ is gelijk aan de som van de afzonderlijke varianties.
Omdat $(\sigma(X))^2 = \text{Var}(X)$ moet gelden $(\sigma(X+Y))^2 = \sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2$. En dus
$\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}$.

Opgave 1

Bekijk de kansverdelingen in de **Uitleg**.

a Beschrijf hoe de kansverdeling voor $X+Y$ tot stand is gekomen.

b Welke stilzwijgende aanname is daarbij gedaan?

Opgave 2

In de **Uitleg** wordt het verband besproken tussen de verwachtingswaarden en de standaardafwijkingen van X, Y en $X+Y$.

a Bereken zelf de verwachtingswaarden van X, Y en $X+Y$ en ga na dat $\text{E}(X+Y) = \text{E}(X) + \text{E}(Y)$.

b Bereken zelf de standaardafwijkingen van X, Y en $X+Y$ en ga na dat $(\sigma(X+Y))^2 = (\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2$.

c Waarom wordt deze manier van optellen van standaardafwijkingen wel 'pythagorisch optellen' genoemd?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Vaak heb je met de som van een aantal stochasten te maken. Zo kun je vanuit een kansverdeling voor stochast X met waarden x_1, x_2, ..., x_n en een kansverdeling voor stochast Y met waarden y_1, y_2, ..., y_m ook een kansverdeling maken voor $X+Y$ door kansen te berekenen bij alle waarden $x_i + y_j$.

Beide stochasten zijn **onafhankelijk** als $\text{P}\left(X = x_i \text{ en } Y = y_j\right) = \text{P}(X = x_i) \cdot \text{P}\left(Y = y_j\right)$ voor elke x_i en elke y_j.

Er geldt: $\text{E}(X+Y) = \text{E}(X) + \text{E}(Y)$.

Ook geldt als X en Y onafhankelijk zijn: $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

Omdat $(\sigma(X))^2 = \text{Var}(X)$ geldt voor onafhankelijke stochasten X en Y:
$(\sigma(X+Y))^2 = (\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2$.

En dus geldt voor onafhankelijke stochasten:

X en Y: $\sigma(X+Y) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2}$.

Voorbeeld 1

Voor boogschutter A is stochast X het aantal punten dat hij bij elk schot behaalt. Je ziet de kansverdeling voor X.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{P}(X = x)$	0,02	0,02	0,04	0,10	0,09	0,11	0,12	0,12	0,15	0,15	0,08

Tabel 3

Voor boogschutter B is stochast Y het aantal punten dat hij bij elk schot behaalt. Je ziet de kansverdeling voor Y.

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{P}(Y = y)$	0,01	0,02	0,03	0,03	0,04	0,06	0,05	0,11	0,20	0,21	0,24

Tabel 4

Beide boogschutters vormen een team en hun scores worden opgeteld.
Bereken de verwachting en de standaardafwijking van $X+Y$.

Antwoord

Beide stochasten zijn onafhankelijk.
Ga met je grafische rekenmachine na dat $\text{E}(X) = 6{,}22$ en $\text{Var}(X) = (\sigma(X))^2 = 6{,}5316$.
En verder dat $\text{E}(Y) = 7{,}59$ en $\text{Var}(Y) = (\sigma(Y))^2 = 5{,}9419$.
Dan is $\text{E}(X+Y) = 6{,}22 + 7{,}59 = 13{,}81$ en $\sigma(X+Y) = \sqrt{6{,}5316 + 5{,}9419} = \sqrt{12{,}4735} \approx 3{,}53$.

Opgave 3

Voor boogschutter A is stochast X het aantal punten dat hij bij elk schot behaalt. Je ziet de kansverdeling voor X.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{P}(X = x)$	0,02	0,03	0,03	0,06	0,10	0,11	0,13	0,13	0,15	0,12	0,12

Tabel 5

Voor boogschutter B is stochast Y het aantal punten dat hij bij elk schot behaalt. Je ziet de kansverdeling voor Y.

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{P}(Y = y)$	0,01	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,06	0,11	0,21	0,22	0,23

Tabel 6

Beide boogschutters vormen een team en hun scores worden opgeteld.

a Gebruik de grafische rekenmachine om de verwachtingswaarden en standaardafwijkingen van X, Y en $X+Y$ te berekenen. Rond af op twee decimalen.

b Bereken een aantal waarden van de kansverdeling van $X+Y$ met de hand. Licht je antwoord toe.

Voorbeeld 2

Voor boogschutter A is stochast X het aantal punten dat hij bij elk schot behaalt. Je ziet de kansverdeling voor X.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{P}(X = x)$	0,02	0,02	0,04	0,10	0,09	0,11	0,12	0,12	0,15	0,15	0,08

Tabel 7

Bij elke schotbeurt worden drie pijlen op het doel afgevuurd en de scores opgeteld.
Bereken de verwachting en de standaardafwijking voor elke schotbeurt.

Antwoord

Elke afgeschoten pijl beweegt onafhankelijk van de andere twee, dus bij elke schotbeurt hoort de stochast $S = X + X + X = 3X$.

De verwachting per schotbeurt is daarom:
$\text{E}(3X) = \text{E}(X+X+X) = \text{E}(X) + \text{E}(X) + \text{E}(X) = 3 \cdot \text{E}(X)$
De standaardafwijking per schotbeurt is:

$\sigma(3X) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(X))^2 + (\sigma(X))^2} = \sqrt{3} \cdot \sigma(X)$

Dit betekent dat voor elke schotbeurt geldt:

$\text{E}(3X) = 3 \cdot 6{,}22 = 18{,}66$ en $\sigma(3X) = \sqrt{3} \cdot \sigma(X) \approx 4{,}43$ punten.

Opgave 4

Voor boogschutter A is stochast X het aantal punten dat hij bij elk schot behaalt. Je ziet de kansverdeling voor X.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{P}(X = x)$	0,02	0,02	0,04	0,10	0,09	0,11	0,12	0,12	0,15	0,15	0,08

Tabel 8

Bij elke schotbeurt worden drie pijlen op het doel afgevuurd en de scores opgeteld.

a Geef een paar voorbeelden van hoe je de kansverdeling van het aantal behaalde punten in een schotbeurt opstelt.

b Hoe kun je nagaan dat $\text{E}(3X) = 3 \cdot \text{E}(X)$ en $\sigma(3X) = 3 \cdot \sigma(X)$ zonder van de optelregels gebruik te maken?

Opgave 5

Voor boogschutter A is stochast X het aantal punten dat hij bij elk schot behaalt. Je ziet de kansverdeling voor X.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{P}(X = x)$	0,02	0,02	0,04	0,10	0,09	0,11	0,12	0,12	0,15	0,15	0,08

Tabel 9

Hier geldt $\text{E}(X) = 6{,}22$ en $\sigma(X) \approx 2{,}56$.

a Stel je voor dat het aantal punten van elke ring 2 hoger is. Welke stochast heb je dan?

b Welke verwachtingswaarde heeft de stochast bij a?

c Welke standaardafwijking hoort bij de stochast bij a?

Voorbeeld 3

Iemand gooit met 20 geldstukken. Hoeveel maal 'kop' verwacht je en hoe groot is de standaardafwijking van de kansverdeling voor het aantal keren 'kop'?

Antwoord

Per geldstuk is het aantal keren 'kop' 0 of 1. Daarbij hoort deze kansverdeling:

x	0	1
$\text{P}(X = x)$	0,5	0,5

Tabel 10

En daarbij hoort: $\text{E}(X) = 0{,}5$ en $\sigma(X) = 0{,}5$.

De 20 geldstukken stuiteren onafhankelijk van elkaar over tafel. De stochast is dus $X + X + ... + X + X = 20X$.
Je verwacht dus $\text{E}(20X) = 20 \cdot 0{,}5 = 10$ keer kop en een variantie $\text{Var}(20X) = 20 \cdot \text{Var}(X)$. Hiermee is de standaardafwijking van $\sigma(20X) \approx \sqrt{20 \cdot 0{,}5^2} = \sqrt{20} \cdot 0{,}5 \approx 2{,}24$ keer kop.

Opgave 6

Iemand gooit met tien dobbelstenen. Hoeveel ogen verwacht hij in totaal? Met welke standaardafwijking? Rond indien nodig af op één decimaal.

Verwerken

Opgave 7

Je ziet twee kansverdelingen. De stochasten X en Y zijn onafhankelijk van elkaar.

x	0	1	2
$\text{P}(X = x)$	0,15	0,30	0,55

y	1	2
$\text{P}(Y = y)$	0,35	0,65

Tabel 11

a Maak een kansverdeling voor $Y - X$.

b Laat zien dat $\text{E}(Y - X) = \text{E}(Y) - \text{E}(X)$.

c Laat zien dat $\sigma(Y - X) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2}$.

Opgave 8

Als je een lot in een loterij koopt, is de kans dat er op dat lot een prijs valt 0,14. Stel je voor dat je tien loten hebt gekocht.

a Bereken op hoeveel loten je een prijs kunt verwachten.

b Bereken de standaardafwijking op dit aantal loten. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 9

Stel dat je aan de muntzijde van een geldstuk iets hebt afgeslepen. De kans op munt is daardoor p geworden. Er wordt met deze munt geworpen. Op de lange duur blijft in ongeveer één op de drie keer gooien munt boven komen.

a Je werpt nu 100 keer met dit geldstuk. Bereken hoe vaak munt boven komt.

b Bereken ook exact welke standaardafwijking daarbij hoort.

Opgave 10

Iemand ontwerpt een simulator die het werpen met dobbelstenen nabootst. De simulator zorgt ervoor, niet zichtbaar, dat de tweede dobbelsteen altijd precies 1 oog meer aangeeft dan de eerste. Behalve als de eerste 6 ogen heeft, dan heeft de tweede 1 oog. Noem X het aantal ogen op de eerste dobbelsteen en Y dat op de tweede.

a Stel een kansverdeling op voor $X + Y$.

b Bereken de waarden van $\text{E}(X + Y)$ en $\sigma(X + Y)$. Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

c Waarom geldt hier niet $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$?

Opgave 11

Bij een dobbelspel moet Charlotte om een ronde te winnen met een dobbelsteen een 5 of 6 gooien. Noem X de uitkomst, met $X = 0$ als ze de ronde niet wint, en $X = 1$ als ze de ronde wel wint.

a Bereken exact de verwachtingswaarde en standaardafwijking van X.

b Er worden vijf rondes gespeeld. Geef de exacte verwachtingswaarde en standaardafwijking van hoeveel van deze rondes Charlotte wint.

c Charlotte wint het spel als ze van de vijf rondes er minstens vier wint (in wat voor volgorde dan ook). Bereken de kans op deze gebeurtenis, in vier decimalen nauwkeurig.

d Hoeveel rondes moet Charlotte spelen zodanig dat de standaardafwijking van het aantal rondes dat ze wint, gelijk is aan $\sqrt{32}$?

Toepassen

Opgave 12: Schoolexamen

Voor een bepaald onderdeel uit het schoolexamen moeten twee practicumtoetsen gemaakt worden. De toetsen zijn op die school door de jaren heen zodanig met elkaar te vergelijken, dat de school van het cijferbeeld betrouwbaar statistisch materiaal heeft verkregen.

	2e toets		
1e toets	5	6	7
4	10	5	0
5	11	5	2
6	8	14	7
7	3	13	12
8	0	4	6

Figuur 2

De tabel laat zien dat bijvoorbeeld $\frac{13}{100} = 13\%$ van alle deelnemers aan beide toetsen voor de eerste toets een 7 haalde en voor de tweede een 6. Stochast A is het cijfer dat een willekeurige leerling op grond van deze statistiek voor de eerste toets behaalt. Stochast B is het cijfer dat diezelfde leerling voor de tweede toets behaalt. Stochast $C = \frac{1}{2}(A + B)$.

a Stel de kansverdelingen voor A en B op.

b Welke betekenis heeft stochast C?

c Bereken de verwachtingswaarde van stochast C. Rond af op één decimaal.

d Bereken $\sigma(C)$. Rond af op twee decimalen. Leg uit waarom je in dit geval de standaardafwijking niet met de somregel voor twee stochasten kunt berekenen.

Opgave 13: Kaartspel

Bij een kaartspel geldt de volgende puntentelling:

- alle kaarten zonder plaatjes zijn ieder 0 punten waard
- een boer is 1 punt waard
- een vrouw is 2 punten waard
- een heer is 3 punten waard
- een aas is 4 punten waard

Bij dit spel pak je met terugleggen kaarten van de stapel en tel je de punten bij elkaar op. De verwachtingswaarde van het aantal punten is 10. Bereken in twee decimalen nauwkeurig de standaardafwijking van het aantal punten.

Figuur 3

Testen

Opgave 14

Je werpt met een zuivere dobbelsteen en een zuivere viervlaksdobbelsteen. X is het aantal ogen op de gewone dobbelsteen, Y dat op de viervlaksdobbelsteen.
Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van $X + Y$. Rond indien nodig af op twee decimalen.

Opgave 15

Als je met twee geldstukken gooit, dan kun je 0, 1 of 2 maal kop gooien.

a Bereken de kans op elk aantal. Je mag aannemen dat de munten zuiver zijn.

b Bereken de verwachting van het aantal keren kop.

c Bereken de standaardafwijking van het aantal keren kop in twee decimalen nauwkeurig.

d Bereken het verwachte aantal keren kop als je tien keer met twee geldstukken gooit.

e Bereken de standaardafwijking van het verwachte aantal keren kop als je tien keer met twee geldstukken gooit, in twee decimalen nauwkeurig.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.