4.1 Stochasten

Inleiding

Er bestaan variabelen waarvan de uitkomst afhangt van het toeval. Voorbeelden te over waarbij je wel telkens goed moet afspreken wat je onder dit toeval (en de grootte van de kansen) moet verstaan. Neem bijvoorbeeld het spel 'darts'. Voor iemand die zonder echt te mikken wel steeds zijn pijltje ergens op het dartbord weet te gooien zou je bij elke score kunnen spreken van toeval. Maar hoe stel je dit toeval vast? Kun je voor elke mogelijke score de kans erop vaststellen? En hoe dan wel?

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip (discrete) stochast (ook wel toevalsvariabele);
- kansverdelingen opstellen;
- werken met de verwachting en de standaardafwijking.

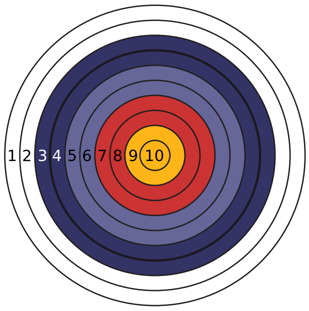
Voorkennis

- werken met frequentieverdelingen;
- werken met gemiddelde en standaardafwijking bij frequentieverdelingen.

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je de indeling van een schietschijf. Het aantal punten dat je bij een schot met één pijl kunt scoren is vooral voor onervaren boogschutters van het toeval afhankelijk. Neem aan dat het aantal punten D als een toevalsvariabele kan worden opgevat.



Figuur 2

a Verzin een manier om hiervoor een kansverdeling op te stellen.

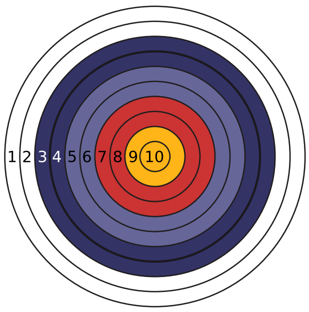
b Is er verschil tussen ervaren of onervaren boogschutters voor wat betreft de kansverdeling?

c Hoe bepaal je hoeveel punten je met één schot met een pijl gemiddeld kunt verwachten?

d Hoe zou je een wereldranglijst van beste boogschutters kunnen maken?

Uitleg

De kans dat je bij het handboogschieten de roos raakt is, tenzij je een prof bent, niet zo groot. In feite hangt die kans af van de schutter en kan hij alleen experimenteel worden bepaald.



Figuur 3

Het aantal punten dat je met boogschieten met één pijl behaalt, is een toevalsvariabele, ook wel een stochast genoemd. Omdat in dit geval het aantal mogelijke waarden dat de stochast kan aannemen eindig is, spreek je van een discrete stochast.

Bij een bepaalde schutter kun je de relatieve frequentie van elke mogelijke score bepalen. En dit kun je opvatten als kansverdeling van de stochast. Je stelt de stochast vaak voor met een hoofdletter, bijvoorbeeld X.

Een dergelijke kansverdeling ziet er dan zo uit:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x)$	0,02	0,02	0,04	0,10	0,09	0,11	0,12	0,12	0,15	0,15	0,08

Tabel 1

Als je deze kansverdeling goed bekijkt, zie je dat dit geen hele goede boogschutter is: de roos wordt maar in 8% van de gevallen geraakt en de spreiding is nogal groot.

Door in de tabel telkens de score met de relatieve frequentie te vermenigvuldigen en de uitkomsten bij elkaar op te tellen, krijg je de verwachting van het aantal punten per schot. Je vindt dan dat de verwachting voor deze schutter 6,22 punten per schot is.
De verwachtingswaarde is een maat voor het centrum van de verdeling.

Voor de spreiding gebruik je een maat die standaardafwijking heet:

- Bereken van elke mogelijke score het verschil met de verwachtingswaarde en neem daarvan het kwadraat.
- Vermenigvuldig de gevonden getallen met hun relatieve frequentie.
- Tel alle uitkomsten bij elkaar op. Het getal dat je krijgt heet de variantie.
- Ten slotte trek je de wortel uit de variantie.

Dat geeft de standaardafwijking, een geschikte maat voor de spreiding van de kansverdeling. Voor deze schutter vind je een standaardafwijking van ongeveer 2,56.

Opgave 1

Bekijk de kansverdeling van de boogschutter in de **Uitleg**.

a Beschrijf hoe deze kansverdeling tot stand is gekomen.

b Bereken zelf de verwachtingswaarde. Beschrijf wat dit getal voor de boogschutter precies betekent.

c Deze boogschutter schiet nu 15 keer op de roos. Hoeveel punten verwacht hij te behalen?

Opgave 2

Bekijk in de **Uitleg** hoe je de standaardafwijking van de kansverdeling berekent.

a Laat zien dat de standaardafwijking van de kansverdeling van de boogschutter ongeveer 2,56 is.

b Teken een staafdiagram van deze kansverdeling.

c Waarom zal de kansverdeling van een redelijk goede boogschutter niet symmetrisch zijn?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **toevalsvariabele** is een variabele die verschillende waarden kan aannemen. Bij elk van die waarden hoort een kans dat die waarde optreedt. Een toevalsvariabele noem je ook wel een **stochast**. Als het aantal mogelijke waarden dat de stochast kan aannemen eindig is of oneindig veel ‘losse’ waarden betreft (zoals bijvoorbeeld 0,1,2,...), spreek je van een **discrete stochast**.
Bij stochast X met waarden $x_1, x_2, ..., x_n$, hoort een **kansverdeling**, een tabel met kansen $P(X = x_i)$ waarbij $i = 1, 2, ..., n$. Als de kansen op alle uitkomsten gelijk aan elkaar zijn, zoals bij het gooien van een zuivere dobbelsteen, dan spreek je ook wel van een **uniforme kansverdeling**.

Een kansverdeling kan worden beschreven door:

- de **verwachtingswaarde** van de stochast, notatie $E(X)$ of $\mu(X)$.
- de **standaardafwijking** (of **standaarddeviatie**) van X, notatie $\sigma(X)$:
  de **variantie** van X is de som van de verwachtingswaarden van de kwadraten van de verschillen $x_i - E(X)$ maal de kans erop, en de standaardafwijking is de wortel uit de variantie, in formulevorm:

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot P(X = x_i) \text{ en } \sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

Voorbeeld 1

X is het aantal punten dat je bij boogschieten bij elk schot kunt behalen. Bekijk in de tabel voor speler A een kansverdeling van X.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x)$	0,02	0,02	0,04	0,10	0,09	0,11	0,12	0,12	0,15	0,15	0,08

Tabel 2

Bereken bij deze kansverdeling de verwachtingswaarde en de standaardafwijking.

Antwoord

In de figuur staat de uitwerking met behulp van Excel.

Boogschieten: score speler A					
nummer	score	kans			
i	x	$P(X=x)$	$x \cdot P(X=x)$	(x - E(X))^2	(x - E(X))^2 · P(X=x)
1	0	0,02	0,00	38,6884	0,773768
2	1	0,02	0,02	27,2484	0,544968
3	2	0,04	0,08	17,8084	0,712336
4	3	0,10	0,30	10,3684	1,03684
5	4	0,09	0,36	4,9284	0,443556
6	5	0,11	0,55	1,4884	0,163724
7	6	0,12	0,72	0,0484	0,005808
8	7	0,12	0,84	0,6084	0,073008
9	8	0,15	1,20	3,1684	0,47526
10	9	0,15	1,35	7,7284	1,15926
11	10	0,08	0,80	14,2884	1,143072
		E(X) =	6,22	Var(X) =	6,5316
				σ(X) =	2,555699513

Figuur 4

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**. Voor boogschutter B is er ook een kansverdeling gemaakt.

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(Y = y)$	0,01	0,02	0,03	0,03	0,04	0,06	0,05	0,11	0,20	0,21	0,24

Tabel 3

a Bereken de verwachtingswaarde van Y.

b Bereken in twee decimalen nauwkeurig de standaardafwijking van Y.

c Vergelijk de twee frequentieverdelingen van de boogschutter uit het voorbeeld en deze boogschutter. Welk van beide boogschutters is de betere schutter? En hoe zie je dat aan de verwachtingswaarden en de standaardafwijkingen?

Voorbeeld 2

Stochast X stelt het aantal ogen voor op het vlak dat boven komt na het werpen met een gewone dobbelsteen. Stel een kansverdeling voor X op en bepaal de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van X.

Antwoord

De kansverdeling van X heet uniform, omdat alle kansen gelijk zijn.

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

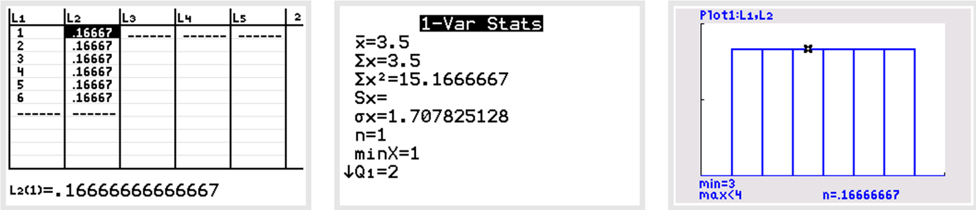
Tabel 4

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + \ldots + 6) = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot \frac{1+6}{2} = 3{,}5$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{(1-3{,}5)^2+(2-3{,}5)^2+\ldots+(6-3{,}5)^2}{6}} = \sqrt{\frac{17{,}5}{6}} \approx 1{,}71$$

Je kunt dit ook met de grafische rekenmachine berekenen. Je voert dan de kansverdeling op de grafische rekenmachine in, net als een frequentietabel. Hoe dit gaat, zie je in het **Practicum**.

Met behulp van de rekenmachine vind je ook dat $\mathrm{E}(X) = 3{,}5$ en $\sigma_X \approx 1{,}71$.



Figuur 5

Opgave 4

De kansverdeling voor het werpen van één dobbelsteen is uniform. De berekening van de verwachtingswaarde en de standaardafwijking is met de grafische rekenmachine uit te voeren.

a Voer zelf de kansverdeling op de grafische rekenmachine in.

b Controleer de berekende verwachtingswaarde en standaardafwijking.

Voorbeeld 3

Stochast X stelt het aantal ogen voor op het vlak dat boven komt na het werpen met twee dobbelstenen. Stel een kansverdeling voor X op en bepaal de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van X.

Antwoord

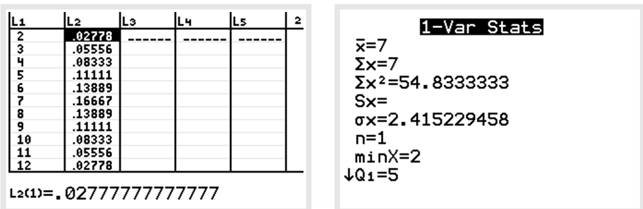
De kansverdeling van X maak je vanuit het overzicht van alle 36 mogelijkheden.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Tabel 5

Deze kansverdeling voer je op de grafische rekenmachine in, net als een frequentietabel.

Je vindt: $\mathrm{E}(X) = 7$ en $\sigma(X) \approx 2{,}42$. Ga dat na.



Figuur 6

Opgave 5

Bekijk de kansverdeling in **Voorbeeld 3**.

a Licht de kansen in deze kansverdeling toe.

b Controleer de berekende verwachtingswaarde en standaardafwijking. Rond zo nodig af op twee decimalen.

c Vergelijk de resultaten met die bij het werpen van één dobbelsteen. Wat valt je op?

Opgave 6

Stel je voor dat je met drie dobbelstenen gooit. Let nu niet op het totaal aantal ogen dat boven komt, maar op het aantal zessen A.

a Stel een bijbehorende kansverdeling op.

b Welke verwachtingswaarde en welke standaardafwijking heeft A? Rond af op twee decimalen nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 7

Je staat met een sleutelbos met zes verschillende sleutels voor een gesloten deur. Je weet alleen dat precies één van de sleutels gaat passen, maar niet welke dat is. Je probeert een sleutel. Als hij past, dan open je de deur. Past hij niet, dan houd je hem apart en probeer je een andere sleutel.
Noem het aantal sleutels dat je moet proberen totdat de deur opengaat S.

a Bereken de kans dat de deur pas bij de zesde sleutel opengaat: $\text{P}(S = 6)$

b Stel een kansverdeling op voor S.

c Hoeveel sleutels verwacht je te moeten proberen?

Opgave 8

Iemand heeft de tijd (in s) gemeten die een groot aantal proefpersonen nodig had om op een foto een bepaald voorwerp te herkennen. De resultaten staan in deze tabel.

t	1	2	3	4	5	6	7	8
$\text{P}(T = t)$	0,04	0,08	0,15	0,28	0,25	0,17	0,02	0,01

Tabel 6

De relatieve frequenties kun je opvatten als de kansen dat het voorwerp na zo veel seconden werd gevonden.

a Hoe groot is de kans dat het voorwerp door een willekeurige proefpersoon na drie seconden wordt herkend? En hoe groot is de kans dat hij er langer over doet?

b Hoeveel tijd verwacht je dat een proefpersoon nodig heeft om het voorwerp te herkennen? Welke standaardafwijking hoort daarbij? Rond af op twee decimalen.

c Hoe groot is de kans dat de herkenningstijd die een proefpersoon nodig heeft meer dan een standaardafwijking van de verwachtingswaarde afwijkt?

Opgave 9

De eigenaar van een ijssalon verdient € 300,00 op een mooie dag. Bij minder goed weer heeft hij een verlies van € 60,00. De kans op een mooie dag is 0,3.

a Bereken algebraïsch de winstverwachting van deze kleine zelfstandige.

b Bereken ook algebraïsch de standaardafwijking van de winst. Rond af op eurocenten.

Opgave 10

Nico bedenkt voor een spellenwebsite een gokspel waarbij je $\frac{1}{5}$ kans hebt op een uitbetaling van € 25,00 en $\frac{2}{5}$ kans op een uitbetaling van € 10,00. Bereken wat voor de beheerders van de website een redelijke minimuminleg is om te vragen.

Opgave 11

Ga ervan uit dat de kans op de geboorte van een meisje even groot is als die van een jongen.

a Hoeveel meisjes mag je in een gezin met twee kinderen verwachten?

b Hoeveel meisjes mag je in een gezin met drie kinderen verwachten?

c Als het goed is, kom je bij b niet op een geheel getal uit. Om niet een geheel aantal mensen te verwachten klinkt natuurlijk best vreemd. Licht dit toe.

Opgave 12

Je gooit met een speciale dobbelsteen. X is het aantal ogen dat je met deze speciale dobbelsteen gooit. Je ziet een gedeelte van de kansverdeling voor X.

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0,25		0,2		0,2	

Tabel 7

Je weet dat de kans op 2 ogen twee keer zo groot is als de kans op 4 ogen. Je weet ook, door heel vaak gooien, dat je gemiddeld 3,2 ogen gooit.

Neem de tabel over en maak de kansverdeling af.

Toepassen

Opgave 13: Chuck-a-luck

Bij het kansspel ‘Chuck-a-luck’ wordt met drie dobbelstenen gegooid. Stel dat je bij zo'n worp met drie dobbelstenen speelt op het aantal vijven. Komt er één vijf voor, dan krijg je de inleg terug. Komen er twee vijven voor, dan krijg je twee keer je inleg terug. Komen er drie vijven voor, dan krijg je maar liefst tien keer je inleg terug.

a Stochast A is het aantal vijven bij het werpen met drie dobbelstenen. Stel een bijbehorende kansverdeling op.

b Een andere stochast is de uitbetaling U per ingelegde euro per worp. Stel ook een daarbij passende kansverdeling op.

c Welke verwachtingswaarde en welke standaardafwijking heeft U? Rond af op twee decimalen.

d Ga je veel verdienen aan dit spel? Licht je antwoord toe.

Opgave 14: Twee verschillende dobbelstenen

Voor een spelletje gooi je twee dobbelstenen: één normale dobbelsteen en één viervlaksdobbelsteen. Noem X de uitkomst van de worp met de normale dobbelsteen en Y de uitkomst met de viervlaksdobbelsteen.

a Bereken exact de verwachtingswaarden en standaardafwijkingen van X en Y.

b Stel de kansverdeling op van $X + Y$: de som van de uitkomsten van beide dobbelstenen.

c Bereken de verwachtingswaarde en standaardafwijking van $X + Y$, en vergelijk je antwoord met dat van a.

d Een derde stochast Z is afhankelijk van de uitkomst van $X + Y$: als daar een even getal uitkomt, is $Z = 0$. Anders is $Z = 1$. Bereken algebraïsch de verwachtingswaarde en standaardafwijking van Z.

Testen

Opgave 15

Twee op papier even sterke tennissers hebben de finale van hun clubkampioenschap bereikt. Ze moeten onderling in één partij, waarbij het gaat om drie gewonnen sets, uitmaken wie zich clubkampioen van dat jaar mag noemen. Winnaar van de finale is dus diegene die het eerst drie sets op zijn naam brengt.
Stochast T stelt het aantal te spelen sets voor.

a Stel een kansverdeling voor T op.

b Bereken zonder grafische rekenmachine $\text{E}(T)$ en in twee decimalen nauwkeurig $\sigma(T)$. Wat stellen deze getallen in dit verband voor?

Opgave 16

Je werpt vier keer met een zuivere dobbelsteen. Stochast X stelt het aantal zessen voor dat daarbij bovenkomt.

a Stel de kansverdeling van X op.

b Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van X.

Practicum

Met Excel (versie 2013/2016/2019) kun je **het gemiddelde en de standaardafwijking van een frequentieverdeling bepalen**. Bekijk:

- **Data presenteren en vergelijken**

Met de grafische rekenmachine kun je het gemiddelde en de standaardafwijking van een frequentieverdeling bepalen. Bekijk:

- **Statistiek en de TI-84**
- **Statistiek en de TInspire**
- **Statistiek en de Casio**
- **Statistiek en de HPprime**
- **Statistiek en de NumWorks**