# 2.4 Toevalsvariabelen

## Inleiding

Bij basketbal wordt per speler het schotpercentage bijgehouden. Als iemand een schotpercentage van 25 heeft, scoort hij bij één op de vier doelpogingen. Je kunt dit percentage daarom opvatten als zijn trefkans bij elke doelpoging.
Maar hoe liggen zijn kansen als hij meerdere doelpogingen doet?

Figuur 1

### Je leert in dit onderwerp

- een kansverdeling maken;
- kansen berekenen waarbij het gaat om minstens of hoogstens;
- het begrip verwachtingswaarde gebruiken.

### Voorkennis

- kansen berekenen met behulp van het vaasmodel en een kansboom.

## Verkennen

### Opgave V1

Bij basketbal wordt per speler het schotpercentage bijgehouden. Als iemand een schotpercentage van 25 heeft, scoort hij bij één op de vier doelpogingen. Je kunt dit percentage daarom opvatten als zijn trefkans bij elke doelpoging. $X$ stelt het aantal scores voor bij drie doelpogingen.

**a** Welke waarden kan $X$ aannemen?

**b** Bereken bij elke waarde van $X$ de bijbehorende kans.

**c** Hoeveel verwacht je van hem?

## Uitleg

Bij basketbal wordt per speler het schotpercentage bijgehouden. Als iemand een schotpercentage van 25 heeft, scoort hij bij één op de vier doelpogingen. Je kunt dit percentage daarom opvatten als zijn trefkans bij elke doelpoging.

Om zijn kansen te bepalen bij bijvoorbeeld drie doelpogingen maak je een kansboom.
Als $X$ het aantal treffers bij deze drie doelpogingen voorstelt, kan $X$ de waarden 0, 1, 2, 3 aannemen.
De bijbehorende kansen kun je berekenen vanuit een kansboom.
Bijvoorbeeld:
$\text{P}(X = 2) = 3 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 \approx 0{,}14$

Zet je al die kansen op een rij, bijvoorbeeld in een tabel, dan is dat een kansverdeling van $X$.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\text{P}(X = x)$ | 0,42 | 0,42 | 0,14 | 0,02 |

Tabel 1

Gemiddeld heeft hij bij drie doelpogingen:
$0 \cdot 0{,}42 + 1 \cdot 0{,}42 + 2 \cdot 0{,}14 + 3 \cdot 0{,}02 = 0{,}76$ treffers.
Dat is de verwachte score ofwel de verwachtingswaarde bij drie doelpogingen.

## Opgave 1

Lees de **Uitleg**. Neem nu aan dat de basketballer vier doelpogingen doet. Zijn schotpercentage blijft 25.

**a** Stel een kansverdeling op voor het aantal treffers. Benader de kansen in vier decimalen nauwkeurig.

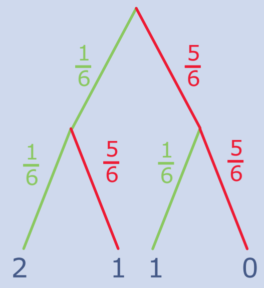
**b** Bereken het verwachte aantal treffers bij vier doelpogingen.

# Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Als een bepaalde variabele $X$ van het toeval afhangt, noem je $X$ een **toevalsvariabele**. Bij elke waarde die $X$ kan aannemen, kun je de bijbehorende kans berekenen (vanuit een kansboom).
Zet je al die kansen op een rij, bijvoorbeeld in een tabel, dan is dat een **kansverdeling** van $X$.

Noem je bij het werpen met twee dobbelstenen het aantal zessen $X$, dan is $X$ een voorbeeld van zo'n toevalsvariabele. De bijbehorende kansverdeling haal je uit de kansboom.



Figuur 2

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{25}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

Tabel 2

Ga na dat de som van alle kansen in zo'n kansverdeling 1 is.

Gemiddeld komt er per worp met twee dobbelstenen

$0 \cdot \frac{25}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ keer een zes voor.

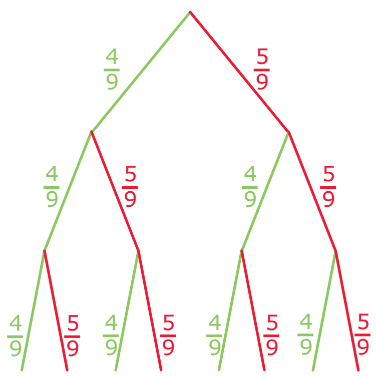
Dat heet de **verwachtingswaarde** van het aantal zessen bij het werpen met twee dobbelstenen: bij gemiddeld één op elke drie worpen (met twee dobbelstenen) komt een zes voor. Als je de dobbelsteen maar vaak genoeg werpt.

### Voorbeeld 1

In een groep van vier mannen en vijf vrouwen worden door loten drie taken (wassen, afwassen en auto wassen) verdeeld.
Als één persoon meerdere van die drie taken mag doen, hoe groot is dan de kans dat er hoogstens twee taken door een man worden uitgevoerd?

Antwoord

Je ziet een bijpassende kansboom. Groen betekent dat de taak door een man wordt gedaan, rood dat het een vrouw betreft. Met behulp van de kansboom maak je deze kansverdeling voor het aantal taken $M$ dat door een man wordt uitgevoerd.



Figuur 3

| $m$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(M = m)$ | $\frac{125}{729}$ | $\frac{300}{729}$ | $\frac{240}{729}$ | $\frac{64}{729}$ |

Tabel 3

Gevraagd wordt de kans dat er nul, één, of twee taken door een man worden uitgevoerd:

$P(M = 0 \text{ of } M = 1 \text{ of } M = 2) = \frac{125}{729} + \frac{300}{729} + \frac{240}{729} = \frac{665}{729}$

Je kunt ook zo rekenen:

$P(M = 0 \text{ of } M = 1 \text{ of } M = 2) = 1 - P(M = 3) = 1 - \frac{64}{729} = \frac{665}{729}$

## Opgave 2

Bekijk **Voorbeeld 1**.

**a** Reken de kansen $P(M = 1)$ en $P(M = 2)$ na.

**b** Bereken de kans dat er minstens twee taken door een man worden uitgevoerd.

**c** Bereken de kans dat er minder dan twee taken door een man worden uitgevoerd.

## Opgave 3

Je gooit met drie dobbelstenen.

**a** Stel een kansverdeling op voor het aantal keren dat je zes gooit.

**b** Bereken het verwachte aantal keer dat je zes gooit.

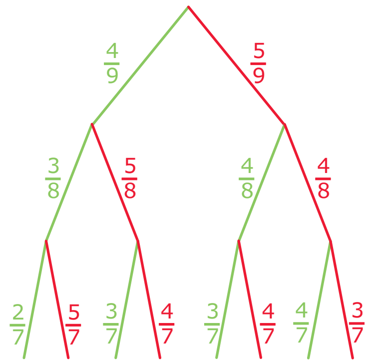
**c** Beschrijf welke betekenis de verwachtingswaarde heeft.

## Voorbeeld 2

In een groep van vier mannen en vijf vrouwen worden door loten drie taken (wassen, afwassen en auto wassen) verdeeld.
Als elk van die drie taken door een andere persoon moet worden gedaan, hoe groot is dan de kans dat er minstens twee taken door een man worden uitgevoerd? Hoeveel taken worden er naar verwachting door een man uitgevoerd?

Antwoord

Je ziet een bijpassende kansboom. Groen betekent dat de taak door een man wordt gedaan, rood dat het een vrouw betreft. Met behulp van de kansboom maak je deze kansverdeling voor het aantal taken $M$ dat door een man wordt uitgevoerd.



Figuur 4

| $m$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(M = m)$ | $\frac{60}{504}$ | $\frac{240}{504}$ | $\frac{180}{504}$ | $\frac{24}{504}$ |

Tabel 4

Gevraagd wordt de kans dat er twee of drie taken door een man worden uitgevoerd:

$P(M = 2 \text{ of } M = 3) = \frac{180}{504} + \frac{24}{504} = \frac{204}{504}$

Naar verwachting worden er $0 \cdot \frac{60}{504} + 1 \cdot \frac{240}{504} + 2 \cdot \frac{180}{504} + 3 \cdot \frac{24}{504} = 1\frac{1}{3}$ taken door een man gedaan.

## Opgave 4

In **Voorbeeld 2** wordt de verwachtingswaarde voor $M$ uitgerekend.

**a** Bereken met behulp van een kansverdeling de verwachtingswaarde van het aantal taken dat door een vrouw wordt uitgevoerd.

**b** Verrast het antwoord bij a je?

## Voorbeeld 3

Voor een bepaalde instaptoets worden alleen gehele cijfers van 1 tot en met 10 gegeven. Daarvan zijn jarenlang de resultaten bijgehouden.

| cijfer | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| relatieve frequentie (%) | 0 | 0 | 4 | 12 | 20 | 26 | 18 | 11 | 7 | 2 |

**Tabel 5**

Ook dit jaar doet een aantal scholieren deze instaptoets. Welk gemiddeld cijfer verwacht je? En hoeveel procent zal een voldoende halen?

Antwoord

De tabel is op te vatten als een kansverdeling.
De bijbehorende verwachtingswaarde is:
$0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0{,}04 \cdot 3 + 0{,}12 \cdot 4 + 0{,}2 \cdot 5 + 0{,}26 \cdot 6 + 0{,}18 \cdot 7 + 0{,}11 \cdot 8 + 0{,}07 \cdot 9 + 0{,}02 \cdot 10 = 6{,}13$
Dus men verwacht een gemiddeld cijfer van 6,1.

Voor het halen van een voldoende moet je minstens een 6 scoren.
De kans daarop is: $0{,}26 + 0{,}18 + 0{,}11 + 0{,}07 + 0{,}02 = 0{,}64$.

### Opgave 5

In **Voorbeeld 3** wordt een verwachtingswaarde uitgerekend bij statistische gegevens. De plant ‘Indigofera australis’ plant zich voort door middel van zaden die in zaaddozen aan de plant groeien. Het aantal zaden per zaaddoos kan nogal variëren. Een Britse onderzoeker heeft van een flink aantal zaaddozen het aantal zaden geteld en de resultaten vastgelegd in een tabel.

| aantal zaden | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| frequentie | 1 | 2 | 8 | 13 | 22 | 45 | 63 | 23 | 1 |

**Tabel 6**

Neem aan dat deze tabel representatief is voor het aantal zaden per zaaddoos voor deze plant. De relatieve frequenties zijn dan op te vatten als kansen van een toevalsvariabele $Z$ die het aantal zaden per zaaddoos van ‘Indigofera australis’ voorstelt.

**a** Maak de bijbehorende tabel met relatieve frequenties in vier decimalen nauwkeurig.

**b** Bereken $\text{P}(Z > 8)$. Hoeveel procent van de zaaddozen van deze plant heeft meer dan acht zaden? Geef het antwoord in procenten nauwkeurig.

**c** Hoe groot is de kans op hoogstens vier zaden in een willekeurig gekozen zaaddoos van deze plant? Geef het antwoord in vier decimalen nauwkeurig.

**d** Hoeveel zaden (in twee decimalen nauwkeurig) verwacht je per zaaddoos?

## Verwerken

### Opgave 6

Iemand werpt tweemaal een munt op.

Toevalsvariabele $K$ is het aantal keren dat zij kop gooit.

**a** Maak de tabel met de kansverdeling van $K$.

**b** Hoe groot is de kans dat zij hoogstens één keer kop gooit?

## Opgave 7

In deze tabel zie je de kansverdeling van toevalsvariabele $X$:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | 0,15 | 0,09 | 0,34 | 0,42 |

**Tabel 7**

Hoe groot is de verwachtingswaarde van $X$? Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

## Opgave 8

Het aantal jongens in een gezin met vier kinderen is een toevalsvariabele $J$. Ga ervan uit dat de kans op de geboorte van een meisje hetzelfde is als de kans op de geboorte van een jongen.

**a** Maak een tabel met de kansverdeling van $J$.

**b** Hoe groot is de kans dat van de vier kinderen uit een gezin er minstens twee een jongen zijn?

**c** Hoeveel jongens verwacht je in zo'n gezin?

**d** Als je 150 van die gezinnen bekijkt, hoeveel jongens verwacht je daar dan tegen te komen? Licht je antwoord toe.

## Opgave 9

Uit een vaas met dertig rode en drie groene balletjes wordt vier keer een balletje getrokken.

**a** $X$ stelt het aantal getrokken groene balletjes voor als telkens wordt teruggelegd. Stel de kansverdeling van $X$ op. Geef de antwoorden in vier decimalen nauwkeurig.

**b** $Y$ stelt het aantal getrokken groene balletjes voor als niet wordt teruggelegd. Stel de kansverdeling van $Y$ op. Geef de antwoorden in vier decimalen nauwkeurig.

## Opgave 10

Uit een klas met zestien meisjes en twaalf jongens worden vier verschillende leerlingen gekozen. $M$ is het aantal meisjes in die groep van vier.

**a** Welke waarden kan $M$ aannemen?

**b** Maak een staafdiagram van de kansverdeling van $M$.

**c** Bepaal het verwachte aantal meisjes in de groep van vier. Geef het antwoord in één decimaal nauwkeurig.

## Opgave 11

Je gooit met twee dobbelstenen en vermenigvuldigt het aantal ogen op de ene dobbelsteen met het aantal ogen op de andere. Dat is de waarde van de toevalsvariabele $Z$.

**a** Stel de kansverdeling van $Z$ op.

**b** Je krijgt de waarde die $Z$ aanneemt, uitbetaald in euro's. Zou je voor dat spel € 12,00 willen inzetten? Hoe groot is dan de kans dat je met één spel winst maakt?

## Opgave 12

In een casino wordt maximaal zes keer met een zuivere munt geworpen totdat kruis boven komt. De speler krijgt respectievelijk € 1,00; € 2,00; € 4,00; € 8,00; € 16,00 of € 32,00 uitbetaald als bij worp nummer 1, 2, 3, 4, 5 respectievelijk 6 kruis wordt gegooid. Bij zes keer munt krijgt hij niets.

Welke inzet moet het casino voor dit spel vragen om op de lange duur gemiddeld € 0,50 per spel winst te krijgen?

## Toepassen

### Opgave 13: Wimbledon

In de finale herenenkel van het tennistoernooi van Wimbledon wordt gespeeld om 'best of five': wie het eerst drie sets heeft gewonnen is kampioen. Na hoogstens vijf sets is er dus een winnaar; het kan al na drie sets. Neem je aan dat beide finalisten even sterk zijn en kans 50% hebben om een set te winnen, dan is het aantal in de finale gespeelde sets een toevalsvariabele $S$.

**a** Maak daarvan een kansverdeling en bereken het verwachte aantal sets.

**b** Neem aan dat het toernooi van Wimbledon al honderd keer is gespeeld. Hoeveel sets zijn er dan naar verwachting in totaal in de finales gespeeld?

De werkelijke gegevens leren toch anders, zie de tabel over 90 finales.

| partijlengte | 3 sets | 4 sets | 5 sets |
|---|---|---|---|
| aantal keer | 44 | 22 | 24 |

**Tabel 8**

**c** Bepaal de experimentele kansverdeling en verwachtingswaarde van $S$.

De oorspronkelijke aanname was dus niet zo goed. Stel je nu voor dat de kans om de eerste set te winnen 50% blijft, maar de kans om de set na een gewonnen set te winnen 70% is (de 'winning mood').

**d** Maak nu opnieuw een kansverdeling (bekijk zorgvuldig alle gevallen).

**e** Bereken het verwachte aantal sets bij de nieuwe kansverdeling.

### Opgave 14: Vogelsoorten

Vogeldeskundigen willen weten welke vogelsoorten in een bepaald gebied leven. Een eenvoudige manier om daarachter te komen, is het maken van een ronde door dat gebied en alle waargenomen vogels te registreren. Men spreekt van een registratie-effectiviteit van 100% wanneer alle aanwezige vogels opgemerkt worden. In de praktijk blijkt de registratie-effectiviteit per ronde slechts 60% te zijn, de overige 40% van de totale vogelpopulatie wordt niet opgemerkt. De Zweedse vogeldeskundige Anders Enemar stelt dat de registratie-effectiviteit door het maken van drie ronden zodanig wordt verhoogd, dat men vrijwel zeker mag aannemen dat alle vogelsoorten zijn opgemerkt. Hij neemt daarbij aan dat iedere aanwezige vogel bij elke ronde 60% kans heeft om opgemerkt te worden.

**a** Bereken hoeveel procent van de totale populatie naar verwachting na drie ronden nog niet zal zijn opgemerkt.

Na drie ronden is de vogelpopulatie verdeeld in vier categorieën: I, II, III, IV.

I niet opgemerkt;

II één keer opgemerkt;

III twee keer opgemerkt;

IV drie keer opgemerkt.

**b** Welke van deze vier categorieën bevat de meeste exemplaren? Licht je antwoord toe met een berekening.

Stel dat er bij iedere ronde ongeveer 450 vogels worden opgemerkt.

**c** Bereken hoeveel vogels er ongeveer bij de derde ronde voor het eerst worden opgemerkt.

**(bron: examen wiskunde A in 1990, eerste tijdvak)**

## Testen

### Opgave 15

Er wordt met 4 munten geworpen. Het aantal keren dat kruis boven komt is een toevalsvariabele $K$.

**a** Bepaal de kansverdeling van $K$.

**b** Bepaal de verwachtingswaarde van $K$.

Je herhaalt het werpen met deze vier munten 200 keer.

**c** Hoeveel keer zul je daarbij $K = 3$ aantreffen?

### Opgave 16

Het bestuur van de korfbalclub telt zeven leden, vier vrouwen en drie mannen. Door loten wordt daaruit een dagelijks bestuur van drie leden gekozen. Het aantal vrouwen in het dagelijkse bestuur is een toevalsvariabele $Z$.

**a** Maak een kansverdeling van $Z$.

**b** Hoe groot is de kans dat er minstens twee vrouwen in het dagelijks bestuur zitten?

**c** Bereken het verwachte aantal vrouwen in het bestuur.