2.3 Kansen vermenigvuldigen

Inleiding

Je hebt kennis gemaakt met regels voor de kansrekening. Vooral als het gaat om grotere hoeveelheden (52 verschillende speelkaarten) en meerdere trekkingen zijn dergelijke regels nuttig.
Daarom leer je nu wanneer je kansen mag vermenigvuldigen. Hierbij is het vaasmodel weer erg handig.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de regels voor het vermenigvuldigen van kansen;
- werken met afhankelijke en onafhankelijke gebeurtenissen;
- voorwaardelijke kansen berekenen.

Voorkennis

- kansen bepalen met behulp van een kansboom;
- het vaasmodel met of zonder teruglegging voor het berekenen van kansen.

Verkennen

Opgave V1

Een volledig kaartspel kent 52 kaarten, van elke 'kleur' evenveel.
Je trekt aselect uit zo'n kaartspel wee kaarten.

a Bereken de kans op twee hartenkaarten.

b Bereken de kans op een hartenkaart en een aas.

Uitleg 1

Je trekt aselect twee kaarten uit een volledig kaartspel. Je kunt dit opvatten als tegelijk twee kaarten trekken of als twee kaarten na elkaar trekken, maar zonder terugleggen. Dit betekent dat de trekking van de tweede kaart 'afhankelijk' is van de trekking van de eerste kaart: bij de tweede trekking is er een kaart minder om uit te kiezen. De kans op een aas bij de eerste kaart is $\frac{4}{52}$.
Wanneer de eerste kaart inderdaad een aas was is de kans op een aas bij de tweede kaart is $\frac{3}{51}$.
Hierbij past een kansboom met twee lagen.
De kans op twee azen is $\text{P}(2 \text{ azen}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{12}{572}$.

Figuur 2

Je ziet dat je niet zonder meer de kans op twee azen kunt berekenen door de kans op één aas met zichzelf te vermenigvuldigen. Dat gaat wel als het om trekking met terugleggen gaat, maar niet als het om trekking zonder terugleggen gaat. Bij trekking zonder terugleggen veranderen de kansen na trekking.

Voor de kans op twee azen bij trekking zonder terugleggen geldt:
P (2 azen) = P (aas) · P (aas | eerste keer aas).
De verticale streep | betekent hier: 'gegeven dat' of 'als wat hierna staat al gebeurd is'.
P (aas | eerste keer aas) is een 'voorwaardelijke kans'.
Bij het berekenen ervan moet je rekening houden met wat er eerder is gebeurd.

Opgave 1

Uit een compleet spel speelkaarten worden aselect en zonder terugleggen twee kaarten getrokken.

a Waarom is de tweede trekking van de tweede kaart afhankelijk van de eerste trekking?

b Hoe groot is de kans dat je de eerste keer een harten- en de tweede keer een schoppenkaart trekt?

c Hoe groot is de kans op een harten- en een schoppenkaart?

d Wat is een voorwaardelijke kans?

e Bereken de volgende voorwaardelijke kans:
P(tweede trekking is een hartenkaart | eerste trekking een schoppenkaart).

f Hoe groot is de kans op een vrouw en een heer?

Uitleg 2

Als je gegevens hebt met twee verschillende variabelen die je in één overzicht wilt verzamelen, maak je een 'kruistabel'.

Stel je hebt de gegevens van vijfhonderd Nederlandse vakantiegangers die samen een reis naar Turkije maakten. Je wilt de vakantiegangers indelen naar de variabele *geslacht* en naar de variabele *leeftijdscategorie*, namelijk 'jong', 'middelbaar' en 'oud'. Het resultaat is weergegeven in de kruistabel. Nu zie je meteen dat er 107 mannen van middelbare leeftijd deelnamen aan de Turkije-reis.

	jong	middelbaar	oud	totaal
man	108	107	24	239
vrouw	103	130	28	261
totaal	211	237	52	500

Tabel 1

Opgave 2

Op een school is onderzocht hoeveel leerlingen er roken. In de tabel vind je de resultaten van dat onderzoek.

a Hoeveel vrouwelijke leerlingen roken op deze school?

b Bepaal de kans dat een willekeurig meisje van deze school rookt.

c Bepaal de kans dat een willekeurige rokende leerling van deze school een meisje is.

rookgedrag	mannen	vrouwen	totaal
roken	105	134	239
niet roken	475	486	961
totaal	580	620	1200

Tabel 2

Opgave 3

Voorwaardelijke kansen komen geregeld voor als je kansen berekent bij frequenties in kruistabellen. Een voorbeeld is een onderzoek naar de Mantoux-test middels een steekproef onder een grote groep personen. De Mantoux-test is een huidtest die wordt gebruikt om na te gaan of iemand tuberculose heeft. Vrijwel alle personen die aan tuberculose lijden, laten een reactie op deze huidtest zien. Maar ook een zeer klein deel van de personen die niet aan tuberculose lijdt, vertoont die reactie.

De kruistabel laat dat zien.

Mantoux-test	tuberculose	geen tuberculose	totaal
reactie	98	99	197
geen reactie	2	9801	9803
totaal	100	9900	10000

Tabel 3

a Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat iemand die een reactie vertoont op de Mantoux-test, ook inderdaad aan tuberculose lijdt.

b Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat iemand die geen reactie vertoont, toch aan tuberculose lijdt.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Twee gebeurtenissen zijn **onafhankelijk** als de kans dat de ene gebeurtenis plaatsvindt, niet verandert als de andere gebeurtenis plaatsvindt, en andersom.
Is G_1 een gebeurtenis bij een kansexperiment en G_2 een gebeurtenis bij een tweede kansexperiment en zijn de kansen van het tweede experiment **onafhankelijk** van de uitkomst van het eerste, dan is:

$\text{P}(G_1 \text{ en } G_2) = \text{P}(G_1) \cdot \text{P}(G_2)$

In het vaasmodel is dit het geval als je **met terugleggen** meerdere balletjes trekt.

Is G_1 een gebeurtenis bij een kansexperiment en G_2 een gebeurtenis bij een tweede kansexperiment en zijn de kansen van het tweede experiment **afhankelijk** van de uitkomst van het eerste, dan is:

$\text{P}(G_1 \text{ en } G_2) = \text{P}(G_1) \cdot \text{P}(G_2|G_1)$

In dit geval is $\text{P}(G_2|G_1)$ een **voorwaardelijke kans**, namelijk de kans op G_2 onder de voorwaarde dat G_1 eerst heeft plaatsgevonden.
In het vaasmodel is dit het geval als je **zonder terugleggen** meerdere balletjes trekt.

De regel $\text{P}(G_1 \text{ en } G_2) = \text{P}(G_1) \cdot \text{P}(G_2|G_1)$ heet de **algemene productregel voor kansen** omdat hij ook geldig is voor onafhankelijke gebeurtenissen.
Dan is namelijk $\text{P}(G_2|G_1) = \text{P}(G_2)$.

Als je gegevens hebt met twee verschillende variabelen die je in één overzicht wilt verzamelen, maak je een **kruistabel**.

Voorbeeld 1

Uit een vaas met zes rode en vier blauwe knikkers worden met teruglegging twee knikkers getrokken. Hoe groot is de kans op een rode en een blauwe knikker?

Antwoord

Het maakt bij de tweede trekking niet uit of de knikker die als eerste getrokken is, rood of blauw was. Door het terugleggen is immers de oorspronkelijke situatie weer hersteld. De tweede trekking is daarom onafhankelijk van de eerste.

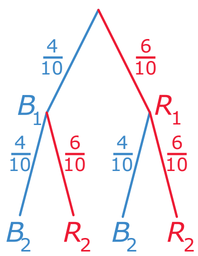
Je kunt dus de productregel voor onafhankelijke kansen gebruiken:

- De kans dat je eerst een rode en dan een blauwe knikker trekt, is:

  $\text{P}(R_1 \text{ en } B_2) = \text{P}(R_1) \cdot \text{P}(B_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{24}{100}$

- De kans dat je eerst een blauwe en dan een rode knikker trekt, is:

  $\text{P}(B_1 \text{ en } R_2) = \text{P}(B_1) \cdot \text{P}(R_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{24}{100}$



Figuur 3

Beide gebeurtenissen sluiten elkaar uit: $\text{P}(R \text{ en } B) = \frac{24}{100} + \frac{24}{100} = \frac{48}{100}$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Bereken de kans op twee blauwe knikkers.

b Bereken de kans op twee rode knikkers.

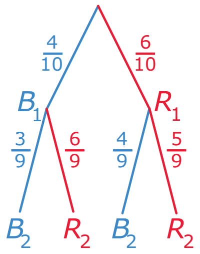
c Waarom is hier sprake van onvoorwaardelijke kansen?

Voorbeeld 2

Uit een vaas met zes rode en vier blauwe knikkers worden zonder teruglegging twee knikkers getrokken.
Hoe groot is de kans op een rode en een blauwe knikker?

Antwoord

Het maakt bij de tweede trekking verschil of de knikker die als eerste getrokken is, rood of blauw was. Door de knikkers niet terug te leggen, is immers de oorspronkelijke situatie gewijzigd. De tweede trekking is daarom afhankelijk van de eerste.



Figuur 4

Je kunt dus de productregel voor afhankelijke kansen gebruiken:

- De kans dat je eerst een rode en dan een blauwe knikker trekt, is:
  $\text{P}(R_1 \text{ en } B_2) = \text{P}(R_1) \cdot \text{P}(B_2|R_1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{90}$
- De kans dat je eerst een blauwe en dan een rode knikker trekt, is:
  $\text{P}(B_1 \text{ en } R_2) = \text{P}(B_1) \cdot \text{P}(R_2|B_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{24}{90}$

Beide gebeurtenissen sluiten elkaar uit: dus $\text{P}(R \text{ en } B) = \frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{48}{90}$.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Bereken de kans op twee blauwe knikkers.

b Bereken de kans op twee rode knikkers.

c Bereken de voorwaardelijke kans $\text{P}(B_2|B_1)$.

d Waarom is het berekenen van $\text{P}(B_2|R_2)$ zinloos?

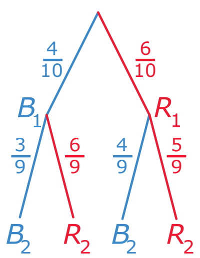
Voorbeeld 3

Uit een vaas met zes rode en vier blauwe knikkers worden zonder teruglegging twee knikkers getrokken.
Hoe groot is de kans dat de tweede knikker rood is?

Antwoord

Het maakt bij de tweede trekking verschil of de eerst getrokken knikker rood of blauw was. Door niet terug te leggen, is immers de oorspronkelijke situatie gewijzigd. De tweede trekking is daarom afhankelijk van de eerste.

De gevraagde kans is:
$\text{P}(R_2) = \text{P}(R_1 \text{ en } R_2) + \text{P}(B_1 \text{ en } R_2) =$
$= \text{P}(R_1) \cdot \text{P}(R_2|R_1) + \text{P}(B_1) \cdot \text{P}(R_2|B_1) =$
$= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{54}{90}$



Figuur 5

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** gaat het om de tweede knikker.

Hoe groot is de kans dat de tweede knikker blauw is?

Opgave 7

Je hebt een vaas met zeven rode, vijf witte en acht blauwe knikkers. Je trekt hieruit in één greep drie knikkers.

a Bereken de kans op drie rode knikkers.

b Bereken P (derde knikker blauw | eerste twee knikkers rood).

c Bereken P (derde knikker blauw en eerste twee knikkers rood).

d Bereken de kans op twee rode knikkers.

e Bereken de kans op drie knikkers van verschillende kleur.

Verwerken

Opgave 8

Uit een compleet spel speelkaarten worden aselect twee kaarten getrokken zonder terugleggen. In **Uitleg 1** heb je gezien hoe een complete set speelkaarten is opgebouwd.

a Hoe groot is de kans op twee schoppenkaarten?

b Hoe groot is de kans dat de tweede kaart een schoppenkaart is?

Opgave 9

In West-Europa heeft 40% van de bevolking bloedgroep A, 10% bloedgroep B, 5% bloedgroep AB en 45% bloedgroep O. Voor de Rhesus-factor geldt: 85% is Rh-positief en 15% is Rh-negatief, ongeacht de bloedgroep waartoe men behoort.

a Bereken het percentage West-Europeanen dat bloedgroep A heeft en Rh-positief is.

b Bereken het percentage West-Europeanen dat bloedgroep O heeft en Rh-negatief is.

c Bereken het percentage West-Europeanen dat Rh-negatief is en niet bloedgroep O heeft.

d Welke van de acht combinaties van bloedgroep en Rh-factor is het zeldzaamst?

Opgave 10

Bij een wandeltocht over vochtig terrein zijn je sokken nat geworden. Onder in je rugzak heb je, los door elkaar, acht droge sokken van vier verschillende paren. Je trekt er één sok uit, en dan steeds weer een tot je de bijpassende sok hebt gekregen. Het is verstandig dat je niet teruglegt.

a Hoe groot is de kans dat je precies bij de vierde sok de bijpassende trekt? Let op dat je nog zeven sokken hebt, want de eerste heb je al gepakt.

b Hoe groot is de kans dat de tweede of de derde sok al de goede is?

Opgave 11

In een doos zitten tien kaarten, elk met een cijfer erop. Er is één kaart met een 1, er zijn twee kaarten met een 2, drie kaarten met een 3 en op vier kaarten staat een 4. Je trekt zonder terugleggen vier kaarten en legt die van links naar rechts naast elkaar. Je ziet dan een getal van vier cijfers.

a Hoe groot is de kans dat dit getal 1234 is?

b Hoe groot is de kans dat dit getal 4321 is?

c Hoe groot is de kans dat dit getal 3344 is?

d Bij a en b krijg je hetzelfde antwoord. Licht toe waarom elk van de getallen die je met de cijfers 1, 2, 3 en 4 schrijft dezelfde kans heeft.

Opgave 12

In een doos zitten tien kaarten, elk met een cijfer erop. Er is één kaart met een 1, er zijn twee kaarten met een 2, drie kaarten met een 3 en op vier kaarten staat een 4. Je trekt zonder terugleggen vier kaarten en legt die van links naar rechts naast elkaar. Je ziet dan een getal van vier cijfers.

a Laat E het getal zijn dat door de eerste twee cijfers wordt voorgesteld, T het getal dat door de laatste twee cijfers wordt voorgesteld.

Bereken $\text{P}(T = 34 | E = 12)$ en $\text{P}(T = 12 | E = 34)$.

b Eén kaart is stiekem door iemand gemerkt. Hoe groot is de kans dat die kaart op uiterst links terechtkomt?

c Voor de kans dat de gemerkte kaart als derde wordt getrokken kun je beter niet rekenen, maar nadenken. Resultaat?

d Test de productregel door na te gaan of je daarmee hetzelfde resultaat krijgt.

e Bereken de kans in de volgende drie gevallen:

- het getal begint met een 3;
- het getal eindigt met een 3;
- het getal begint met een 3 en eindigt met een 3.

Opgave 13

De kans op ten minste één zes bij vier keer gooien met een dobbelsteen is groter dan 50%.

a Laat zien dat dit inderdaad zo is.

Chevalier de Méré dacht daarom (in 1654) dat hij ook meer dan 50% kans had op dubbel zes als hij $6 \cdot 4 = 24$ keer met twee dobbelstenen gooide, maar hij kwam bedrogen uit. Zijn vriend Pascal moest hem uit de droom helpen.

b Bereken de kans op minstens één keer dubbel zes als je 24 keer met twee dobbelstenen gooit in procenten. Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

c Hoe vaak moet je minstens gooien met twee dobbelstenen zodat de kans op dubbel zes groter is dan 50%?

Toepassen

Opgave 14: Welk medicijn?

Bij een bepaalde ziekte kunnen twee verschillende medicijnen worden voorgeschreven: medicijn A of medicijn B. In principe wordt altijd (het beste) medicijn A voorgeschreven, maar 10% van de patiënten reageert daar allergisch op en krijgt dan medicijn B. Medicijn A zorgt in 95% van de gevallen voor genezing, medicijn B in 75% van de gevallen.

Een ziekenhuis heeft deze medicijnen aan negenhonderd personen voorgeschreven. Hoe groot is de kans dat een genezen persoon uit deze groep medicijn B heeft gekregen? Geef het antwoord in vier decimalen nauwkeurig.

Opgave 15: Pepmiddel

Je ziet een vraag uit één van de Nationale Wetenschapsquizzen.

> Met een steekproef worden de deelnemers aan de tiende Nationale Wetenschapsquiz op een verboden pepmiddel getest. Stel dat tien procent van de deelnemers het pepmiddel gebruikt. De test is slechts voor negentig procent zuiver.

Een deelnemer blijkt pep-positief.
Hoe groot is de kans dat hij het pepmiddel daadwerkelijk heeft gebruikt?

Voor alle duidelijkheid: met de zinsnede ‘de test is slechts voor negentig procent zuiver’ wordt bedoeld dat de test in 10% van de gevallen een verkeerde uitslag geeft. Dus 10% van de gebruikers wordt pep-negatief getest en 10% van de niet-gebruikers wordt pep-positief getest.

Testen

Opgave 16

60% van de artikelen die een fabriek maakt is van soort A, 40% is van soort B. Er gaat wel eens iets mis. Van de artikelen van soort A moet 1% worden afgekeurd. Voor soort B is dat zelfs 2%.

a Wat is de kans dat een aselect gekozen artikel van soort A is en wordt afgekeurd?

b Wat is de kans dat een aselect gekozen artikel van soort B is en wordt goedgekeurd?

c Wat is de kans dat een aselect gekozen artikel wordt afgekeurd?

Opgave 17

Je hebt een vaas met 1200 balletjes, 500 rode, 400 witte en 300 blauwe. Bij elke kleur zijn 200 van de balletjes van hout, de andere zijn van plastic. Het verschil is niet te voelen. Er wordt aselect een balletje uit de vaas gepakt.

a Bepaal P (balletje is wit en van plastic).

b Bepaal P (balletje is rood | balletje is van hout) en P (balletje is van hout | balletje is rood).

c Bepaal P (B is rood of B is van hout).

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.