2.2 Kansen optellen en aftrekken

Inleiding

Je hebt nu het vaasmodel en de bijbehorende kansboom leren kennen. Het lijkt een handig instrument om alle kansproblemen op te lossen, maar toch is het in de praktijk niet altijd even bruikbaar. Zodra het om grotere aantallen trekkingen gaat, wordt een kansboom onoverzichtelijk. Bij trekkingen uit een kaartspel bijvoorbeeld is dit al snel het geval. Dan is het handiger om terug te vallen op regels die beschrijven wanneer je kansen moet optellen en wanneer je ze juist moet vermenigvuldigen.
Daarom wordt nu de kansrekening iets exacter opgebouwd: de kansrekening is een stelsel van regels voor het rekenen met kansen.

Je leert in dit onderwerp

- kansen berekenen met behulp van de somregel en de complementregel;
- de basisbegrippen en de basisregels van de kansrekening;
- een venndiagram aflezen en bijbehorende kansen berekenen.

Voorkennis

- kansen bepalen met behulp van een kansboom;
- het vaasmodel met of zonder teruglegging voor het berekenen van kansen;
- een venndiagram maken.

Verkennen

Opgave V1

Een volledig kaartspel kent 52 kaarten, van elke ‘kleur’ evenveel.
Je trekt aselect uit zo'n kaartspel één kaart.

a Bereken de kans op hartenaas.

b Bereken de kans op hartentwaalf.

c Bereken de kans op een hartenkaart.

d Bereken de kans op geen aas.

e Bereken de kans op een hartenkaart of een ruitenkaart.

f Bereken de kans op een hartenkaart of een boer.

g Bereken de kans op een hartenkaart of een plaatje.

Uitleg

Een volledig kaartspel kent 52 kaarten, van elke ‘kleur’ (harten, klaveren, ruiten of schoppen) evenveel. Een plaatje is een aas, heer, vrouw of boer.
Je trekt aselect uit zo'n kaartspel één kaart.

- De kans op een hartenkaart is:
  $P(\text{hartenkaart}) = \frac{13}{52}$ want daar zijn er 13 van.
- De kans op hartentwaalf is:
  $P(\text{hartentwaalf}) = 0$ want zo'n kaart bestaat niet.
- De kans op geen hartenkaart is:
  $P(\text{geen hartenkaart}) = \frac{52-13}{52} = \frac{52}{52} - \frac{13}{52} = 1 - \frac{13}{52}$.
- De kans op een hartenkaart of een ruitenkaart is:
  $P(\text{harten of ruiten}) = \frac{13+13}{52} = \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$.

Figuur 1

- De kans op een boer, een aas of een hartenvrouw is:

  $\text{P (boer of aas of hartenvrouw)} = \frac{4+4+1}{52} = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} + \frac{1}{52} = \frac{9}{52}$.

Het lijkt erop dat je bij ‘of’ eenvoudigweg de kansen kunt optellen. Maar dat is hier zo, omdat de mogelijkheden elkaar ‘wederzijds uitsluiten’. Vraag je namelijk naar een hartenkaart of een boer, dan zijn er niet $13 + 4$ gunstige mogelijkheden, maar slechts $13 + 4 - 1$ vanwege de hartenboer die anders twee keer wordt geteld.

‘Hartenkaart’ en ‘boer’ sluiten elkaar niet wederzijds uit.

- De kans op een hartenkaart of boer is:

  $\text{P (hartenkaart of boer)} = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$.

Opgave 1

Lees de **Uitleg** goed door.
Uit een compleet spel speelkaarten wordt aselect een kaart getrokken.

a Hoe groot is de kans dat het een plaatje is?

b Hoe groot is de kans dat het geen plaatje is?

c Hoe groot is de kans dat het een schoppenkaart is?

d Hoe groot is de kans dat het een schoppenplaatje is?

e Hoe groot is de kans dat het een schoppenkaart is of een heer?

f Waarom kun je bij e niet gewoon de kans op een schoppenkaart en de kans op een heer optellen?

g Wordt de kans op schoppen of heer kleiner als ruitenheer en schoppenaas in het spel ontbreken?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij een **kansexperiment**, zoals het trekken van een kaart uit een kaartspel, bestaat een **uitkomstenverzameling** (in dit geval met 52 mogelijkheden). Een **gebeurtenis**, zoals ‘het trekken van een tien’, is dan een deel van die uitkomstenverzameling (er zijn vier tienen). Bij elke gebeurtenis hoort een bepaalde **kans**. Hierbij gelden de volgende kansregels:

- De kans op een **onmogelijke gebeurtenis** (niets uit de uitkomstenverzameling) is 0.
- De kans op een **zekere gebeurtenis** (de complete uitkomstenverzameling) is 1.
- Is G een gebeurtenis, dan is $\text{P}(G)$ de kans op die gebeurtenis en $0 \leq \text{P}(G) \leq 1$.
- De **complementregel**:
  Is niet-G de ontkenning van gebeurtenis G, dan is $\text{P (niet-}G) = 1 - \text{P}(G)$.
  Je noemt niet-G en G wel complementaire gebeurtenissen.
- De **somregel**:
  - als de gebeurtenissen G_1 en G_2 elkaar **wederzijds uitsluiten**, dan is $\text{P}(G_1 \text{ of } G_2) = \text{P}(G_1) + \text{P}(G_2)$.
  - als de gebeurtenissen G_1 en G_2 elkaar **niet wederzijds uitsluiten**, dan is $\text{P}(G_1 \text{ of } G_2) = \text{P}(G_1) + \text{P}(G_2) - \text{P}(G_1 \text{ en } G_2)$.

Je ziet dat voor twee gebeurtenissen G_1 en G_2 die elkaar wederzijds uitsluiten, geldt: $\text{P}(G_1 \text{ en } G_2) = 0$.
Een **venndiagram** is een grafische weergave. Daarin worden de kansen of aantallen van maximaal drie gebeurtenissen of eigenschappen die wel of niet van toepassing zijn, weergegeven.

Voorbeeld 1

Een volledig kaartspel kent 52 kaarten, van elke ‘kleur’ evenveel.
Je trekt aselect uit zo'n kaartspel één kaart. Bereken de kans op een hartenkaart of een plaatje.

Antwoord

Er zijn dertien hartenkaarten en $4 \cdot 4 = 16$ plaatjes.
Maar deze gebeurtenissen sluiten elkaar niet uit: er zijn vier hartenplaatjes.

De gevraagde kans is dus: $\text{P}(\text{hartenkaart of plaatje}) = \frac{13}{52} + \frac{16}{52} - \frac{4}{52} = \frac{25}{52}$.

Opgave 2

Bekijk het kaartspel nog eens, zie ook **Voorbeeld 1**. Je trekt er aselect één kaart uit.

Welke van de volgende gebeurtenissen sluiten elkaar uit?

A. Harten kaart of schoppen kaart.
B. Harten kaart of vrouw.
C. Kaart met even getal of plaatje.
D. Kaart met even getal of ruiten kaart.

Opgave 3

Je trekt aselect één kaart uit een kaartspel. Sluiten de volgende gebeurtenissen elkaar uit? Bereken de bijbehorende kans.

a Hartenkaart of schoppenkaart.

b Hartenkaart of vrouw.

c Kaart met even getal of plaatje.

d Kaart met even getal of ruitenkaart.

Voorbeeld 2

Je trekt een lot uit een serie loten met de nummers 10, 11, 12, ..., 99.
Heb je één 2 of één 3 in het lotnummer, dan heb je prijs.
Hoe groot is de kans hierop?

Antwoord

Eerst het cijfer 2:

De kans op links een 2 is $\frac{10}{90}$ en de kans op rechts een 2 is $\frac{9}{90}$.

Dus de kans op één 2 is (sluit 22 uit):
$\frac{10}{90} + \frac{9}{90} - \frac{1}{90} = \frac{18}{90}$

De kans op één 3 in het lotnummer is op dezelfde manier $\frac{18}{90}$.

De kans op een 2 of een 3 in het lotnummer is (sluit 23 en 32 uit): $\frac{18}{90} + \frac{18}{90} - \frac{2}{90} = \frac{34}{90} = \frac{17}{45}$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** gaat het om de trekking bij een loterij.

a Hoe groot is de kans dat het getrokken briefje het cijfer 0 bevat?

b Hoe groot is de kans dat het getrokken briefje het cijfer 0 en het cijfer 2 bevat?

c Hoe groot is de kans dat het getrokken briefje het cijfer 0 of het cijfer 2 bevat?

d Bereken de kans dat het getrokken briefje geen 0 en ook geen 2 bevat.

Maak gebruik van de complementregel. Je hebt bij c immers uitgerekend hoe groot de kans is op een briefje met een 0 of een 2.

Opgave 5

Je gooit met twee gewone dobbelstenen, een rode en een groene. R is het aantal ogen op de rode dobbelsteen, W het aantal ogen op de groene dobbelsteen.

a Maak een overzicht van alle mogelijkheden.

b Hoe groot is $\text{P}(R = 5)$?

c Hoe groot is $\text{P}(W = 4)$?

d Hoe groot is $\text{P}(R = 5 \text{ en } W = 4)$?

e Sluiten de gebeurtenissen $R = 5$ en $W = 4$ elkaar wederzijds uit?

f Hoe groot is $\text{P}(R = 5 \text{ of } W = 4)$?

Voorbeeld 3

Je mag vier keer met een dobbelsteen gooien. Maar je gooit tot je een zes gooit. Dan stop je. Hoe groot is de kans dat je met maximaal vier keer gooien één keer zes gooit?

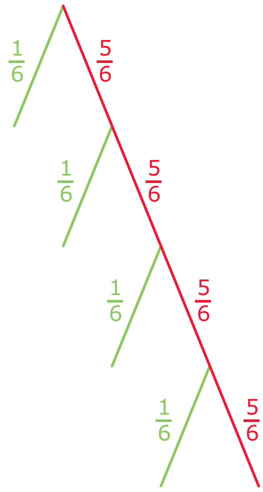
Antwoord

Maak hierbij een kansboom: groen stelt het werpen van een zes voor en rood stelt geen zes voor. De kansen zijn:

- meteen een zes gooien: kans $\frac{1}{6}$
- pas bij de tweede worp een zes gooien: kans $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$
- pas bij de derde worp een zes gooien: kans $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$
- pas bij de vierde worp een zes gooien: kans $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}$

Omdat deze vier gevallen elkaar uitsluiten, mag je de kansen optellen.

Dit kan echter eenvoudiger door vast te stellen dat de complementaire gebeurtenis is: vier keer achter elkaar geen zes gooien. Daarbij hoort een kans van $\left(\frac{5}{6}\right)^4$.



Figuur 2

De gevraagde kans is daarom $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}52$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** gaat het om het werpen met een dobbelsteen tot je een zes gooit. Stel je mag tien keer proberen.

a Hoe groot is de kans dat dit lukt? Geef het antwoord in drie decimalen nauwkeurig.

b Hoe groot is de kans dat je bij de derde worp voor het eerst een zes gooit?

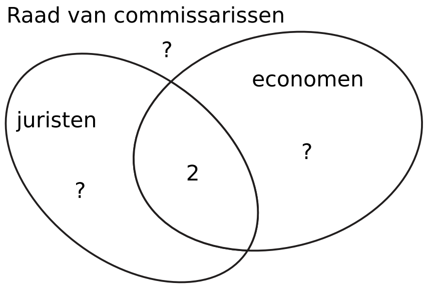
c Hoe groot is de kans dat je bij de achtste worp voor het eerst een zes gooit?

d Hoe groot is de kans dat je in de tien worpen een zes gooit?

e Waarom is de complementregel nu erg handig?

Opgave 7

De raad van commissarissen van een bouwonderneming heeft elf leden, onder wie vijf economen en vier juristen. Twee van de economen zijn ook jurist. De leden zijn om de beurt een maand voorzitter. De volgorde is door loten vastgesteld. Elke maand wordt weer opnieuw geloot, waardoor iemand ook twee maanden achter elkaar voorzitter zou kunnen zijn.



Figuur 3

a Vul het venndiagram verder in.

b Hoe groot is de kans dat de voorzitter deze maand econoom en jurist is?

c Hoe groot is de kans dat de voorzitter deze maand econoom of jurist is?

d Hoe groot is de kans dat zowel deze maand als de volgende maand de voorzitter econoom of jurist is?

Verwerken

Opgave 8

In een klas van 31 leerlingen zitten:

- 10 jongens die vijftien jaar zijn;
- 8 jongens die zestien jaar zijn;
- 7 meisjes die vijftien jaar zijn;
- 6 meisjes die zestien jaar zijn.

a Sluiten de gebeurtenissen ‘meisje’ en ‘jongen’ elkaar uit?

Willekeurig kiest de docent een leerling uit deze klas.

b Bereken de kans dat dit een meisje of een jongen is.

c Bereken de kans dat dit een vijftienjarig meisje of een vijftienjarige jongen is.

Opgave 9

Bij een bloemenkraampje zijn nog 25 rozen en 20 tulpen te koop:

- 10 witte tulpen
- 5 gele tulpen
- 5 paarse tulpen
- 12 witte rozen
- 13 gele rozen

De verkoper pakt, zonder te kijken, een bloem.

a Hoe groot is de kans op een roos?

b Hoe groot is de kans op een paarse bloem?

c Hoe groot is de kans op géén paarse bloem?

d Hoe groot is de kans op een gele bloem?

e Hoe groot is de kans op een gele bloem of een tulp?

Opgave 10

Een spel kaarten bevat van elk van de vier ‘kleuren’ alleen de kaarten 7, 8, 9, 10, boer, vrouw, heer en aas. Totaal 32 kaarten. Beantwoord de vragen zowel door tellen van gunstige mogelijkheden als door gebruik van de somregel.

a Hoe groot is de kans dat een uit zo'n spel getrokken kaart een ruiten of een plaatje is?

b Hoe groot is de kans dat een uit zo'n spel getrokken kaart een harten of een 9 of een 10 is?

c Hoe groot is de kans dat een uit zo'n spel getrokken kaart een 9 of een 10 is of geen harten?

Opgave 11

Voor de ontwikkeling van kinderen zijn doosjes in de handel gebracht met plastic rondjes, vierkantjes, rechthoekjes en driehoekjes. Van elke soort zijn er grote en kleine stukjes. Van elke soort en elke grootte zijn er twee rode stukjes, twee gele en twee blauwe. In totaal zijn er dus 48 stuks.
Bereken voor een aselect gekozen stukje de kans dat:

a Het stukje geel of een vierkantje is.

b Het stukje is rood of geen vierkantje.

c Het stukje is klein of geen vierkantje.

d Het stukje is blauw of geel of een driehoekje.

Opgave 12

Bij een spel moet je eerst kruis of munt gooien. Gooi je kruis, dan mag je met één dobbelsteen gooien, gooi je munt, dan mag je met twee dobbelstenen gooien. Bereken de volgende kansen.

a De kans dat je twaalf ogen gooit.

b De kans dat je zeven ogen gooit.

c De kans dat je zeven of twaalf ogen gooit.

d De kans dat je meer of minder dan zeven ogen gooit.

e De kans dat je zes ogen gooit.

Opgave 13

Van de leerlingen van een school is 52% meisje, de rest jongen. Een op de dertien meisjes draagt een hoofddoek, een op de zestien jongens draagt een basketbalpet.

a Hoe groot is de kans dat een aselect aangewezen leerling een basketbalpet draagt?

b Hoe groot is de kans dat een aselect aangewezen leerling een meisje is of iets op het hoofd draagt?

c Hoe groot is de kans dat een aselect aangewezen leerling een jongen is of niets op het hoofd draagt?

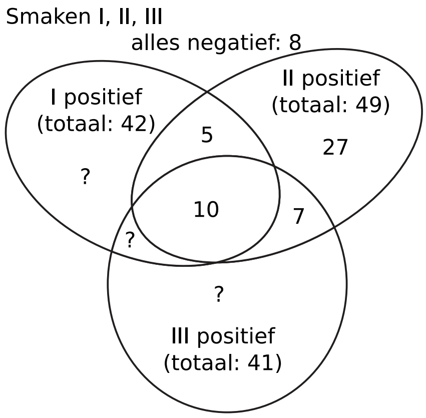
d Wat is de complementaire gebeurtenis van die bij c?

Toepassen

Opgave 14: Het kaakje

Een fabrikant van koekjes wil een nieuwe variant op de markt brengen: het kaakje. Als proef probeert hij drie smaakvarianten die hij I, II en III nummert. Hij vraagt honderd mensen om te komen proeven. In het venndiagram zie je de verdeling van hun oordeel. Het venndiagram is nog niet af.

Bereken de kans dat een proever één van de drie smaakvarianten positief beoordeelt, maar de andere twee smaakvarianten niet.



Figuur 4

Opgave 15: Oprichters, oplichters en opzichters

Een bestuur van 25 personen bestaat uit oprichters, oplichters en opzichters. Sommige leden hebben meer dan één van die kwaliteiten. Er zijn 10 oprichters, 11 oplichters en 15 opzichters. 1 persoon is zowel oprichter als oplichter en opzichter. 3 zijn oprichter en oplichter (en misschien ook opzichter) en 4 zijn oprichter en opzichter (en misschien oplichter).

a Maak op grond van deze gegevens een Venndiagram.

b Hoe groot is de kans dat een willekeurig bestuurslid keurig is (geen oplichter)?

c Hoe groot is de kans dat een willekeurig bestuurslid oprichter is? Dat hij oplichter is? Dat hij beide is?

d Bepaal de kans dat een willekeurig bestuurslid oprichter of oplichter is.

e De kans dat een bestuurslid oprichter, oplichter of opzichter is, is natuurlijk 1. Iemand zegt: "Die kans moet de kans zijn dat hij oprichter of oplichter is, plus de kans dat hij opzichter is." Redeneren helpt niet, dus toon hem dat zijn resultaat niet goed kan zijn en vertel hem dan hoe het wel moet.

Testen

Opgave 16

In een vaas zitten 9 balletjes, 3 rode, 3 blauwe en 3 gele. Ze zijn ook genummerd, van elke kleur draagt één balletje nummer 1, één balletje nummer 2 en één balletje nummer 3. Er wordt aselect één balletje getrokken. Bepaal de kans dat:

a het balletje niet rood is;

b het balletje rood is of nummer 2 heeft;

c het balletje niet blauw is of niet nummer 3 heeft.

Opgave 17

Van de leerlingen van een groep staat 70% voldoende voor wiskunde, 63% staat voldoende voor natuurkunde en 43% staat voldoende voor beide vakken.

a Hoeveel procent staat voldoende voor minstens een van beide vakken?

b Hoeveel procent staat onvoldoende voor beide vakken?

c Hoeveel procent staat voldoende voor wiskunde en onvoldoende voor natuurkunde?

d Hoeveel procent staat voldoende voor wiskunde of onvoldoende voor natuurkunde?