

2.1 Kansbomen

Inleiding

Bij basketbal wordt per speler het schotpercentage bijgehouden. Als iemand een schotpercentage van 25% heeft, scoort hij bij één op de vier doelpogingen. Je kunt dit percentage daarom opvatten als zijn trefkans bij elke doelpoging.

Maar hoe liggen zijn kansen als hij meerdere doelpogingen doet?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- kansen bepalen met behulp van een kansboom;
- het vaasmodel met of zonder teruglegging voor het berekenen van kansen.

Voorkennis

- werken met boomdiagrammen;
- kansen berekenen door tellen van mogelijkheden, eventueel met behulp van diagrammen.

Verkennen

Opgave V1

Bij basketbal wordt per speler het schotpercentage bijgehouden. Als iemand een schotpercentage van 25% heeft, scoort hij bij één op de vier doelpogingen. Je kunt dit percentage daarom opvatten als zijn trefkans bij elke doelpoging.

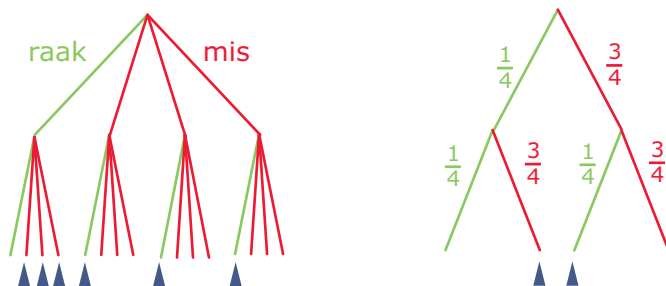
Maar hoe liggen zijn kansen als hij meerdere doelpogingen doet?

- Hoe groot is de kans op twee scores als hij twee doelpogingen doet?
- Hoe groot is de kans op een score als hij twee doelpogingen doet?
- Hoeveel treffers verwacht je van hem?

Uitleg 1

Bij basketbal wordt per speler het schotpercentage bijgehouden. Als iemand een schotpercentage van 25% heeft, scoort hij bij één op de vier doelpogingen. Je kunt dit percentage daarom opvatten als zijn trefkans bij elke doelpoging.

Om zijn kansen te bepalen bij bijvoorbeeld twee doelpogingen, maak je een boomdiagram. Je ziet één treffer naast drie missers bij elke poging.



Figuur 2

Door missers en treffers samen te voegen, kun je het diagram vereenvoudigen tot een kansboom. Als je de kans wilt berekenen op precies één treffer bij twee doelpogingen, kun je in het boomdiagram

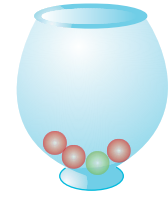
de juiste routes tellen: het zijn er zes van de zestien.

In de kansboom moet je dan kansen vermenigvuldigen en optellen:

$$P(X = 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{16} = 0,375.$$

Je kunt ook een andere methode gebruiken om zijn trefkansen te berekenen.

Om zijn kansen te bepalen bij bijvoorbeeld twee doelpogingen kun je dit opvatten als het aselekt twee keer trekken van een balletje uit een vaas met één groen balletje (raak) en drie rode balletjes (mis). Je moet dan wel nadat je de eerste keer een balletje hebt getrokken, dit balletje weer terug doen in de vaas en het geheel schudden. Dit is een 'vaasmodel' voor de doelpogingen van de basketballer, en het is 'een trekking met teruglegging'.



Figuur 3

Bij elk vaasmodel kun je een kansboom maken om de bijbehorende kansen te berekenen.

Als X het aantal treffers bij twee doelpogingen is, dan geldt ook in het vaasmodel

$$P(X = 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{16} = 0,375.$$

Opgave 1

Ga nu uit van een basketballer met een schotpercentage van 15%.

- Teken een kansboom uitgaande van twee schoten op de basket.
- Bereken de kans op precies één treffer. Geef het antwoord in drie decimalen nauwkeurig.
- Bereken de kans op twee treffers. Geef het antwoord in vier decimalen nauwkeurig.
- Bereken de kans op hoogstens één treffer. Geef het antwoord in vier decimalen nauwkeurig.

Opgave 2

Een basketballer met een schotpercentage van 15% schiet drie keer op de basket.

- Bereken de kans op twee treffers. Geef het antwoord in zes decimalen nauwkeurig.
- Bereken de kans op hoogstens twee treffers. Geef het antwoord in vier decimalen nauwkeurig.
- Bereken de kans op minstens twee treffers. Geef het antwoord in vier decimalen nauwkeurig.

Uitleg 2

In een vaas zitten vier balletjes, drie rode en één groene. Je trekt daaruit aselekt drie keer een balletje. De getrokken balletjes leg je niet terug in de vaas ('een trekking zonder teruglegging'). Je wilt weten hoe groot de kans is op eerst een rood balletje, dan een groen balletje en bij de derde trekking weer een rood balletje.



Figuur 4

Dit is een vaasmodel met een trekking zonder teruglegging.

Je bent op zoek naar de kans $P(\text{rood, groen, rood})$. Bij de eerste trekking zijn drie van de vier balletjes rood. De kans dat het eerste balletje rood is, is $\frac{3}{4}$. Het eerste getrokken

balletje leg je niet terug. Daarna wil je het groene balletje trekken. Die kans is $\frac{1}{3}$, want er zijn drie balletjes over en één daarvan is groen. Het derde balletje moet weer rood zijn. Er zijn nog twee rode balletjes. De kans op een rood balletje is $\frac{2}{2}$.

$$P(\text{rood, groen, rood}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Opgave 3

Je hebt trekking met terugleggen en trekking zonder terugleggen, zie **Uitleg 2**.

- Er wordt bij de basketballer uit **Uitleg 1** aangenomen dat hij tijdens de schoten op de basket een vast schotpercentage van 25% heeft. Gaat het dan om trekking met of trekking zonder terugleggen? Licht je antwoord toe.

- b Waarom kan hier slechts van een aanname sprake zijn? Hoe zit het in werkelijkheid met schotpercentages?

Opgave 4

In een vaas zitten zes balletjes, twee rode en vier groene. Je trekt daaruit aselect en met terugleggen twee keer een balletje.

- a Laat in een kansboom alle mogelijkheden zien.
 b Hoe groot is de kans op eerst een groen en dan een rood balletje?
 c Hoe groot is de kans op twee balletjes van verschillende kleur?

Opgave 5

Uit de vaas met zes balletjes (twee rode en vier groene) trek je nu twee balletjes tegelijk. Je kunt dit zien als het trekken van twee keer één balletje zonder terugleggen.

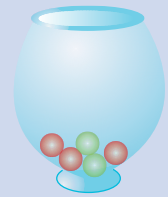
- a Maak een kansboom voor de kleuren.
 b Hoe groot is de kans op een rood en een groen balletje?
 c Hoe groot is de kans op twee balletjes van dezelfde kleur?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Veel situaties waarin kansen een rol spelen, kun je beschrijven door middel van aselecte trekking van balletjes uit een vaas. Dit noem je een **vaasmodel** voor de situatie.

Bij elk vaasmodel kun je een **kansboom** maken om kansen te berekenen. Daarbij moet je goed onderscheiden:



Figuur 5

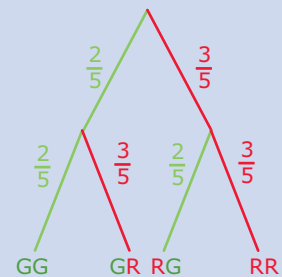
Trekking met teruglegging

Na elke trekking van één balletje doe je dit terug in de vaas en je schudt het geheel. Dan pas trek je een volgend balletje. De kansboom bij een vaas met twee groene en drie rode balletjes zie je hiernaast.

$$P(2 \text{ groen}) = P(GG) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$$

$$P(\text{eerst groen en daarna rood}) = P(GR) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$$

$$P(\text{groen en rood}) = P(GR \text{ of } RG) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$$



Figuur 6

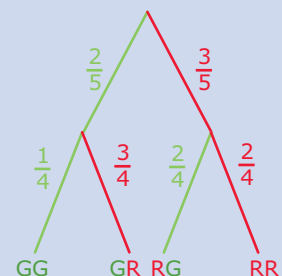
Trekking zonder teruglegging

Na elke trekking van één balletje doe je dit niet terug in de vaas. Je trekt meteen het volgende balletje. (Twee in één greep kan ook.) De kansboom zie je hiernaast.

$$P(2 \text{ groen}) = P(GG) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$$

$$P(\text{eerst groen en daarna rood}) = P(GR) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$$

$$P(\text{groen en rood}) = P(GR \text{ of } RG) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$$



Figuur 7

In een kansboom vermenigvuldig je de kansen bij een bepaalde route steeds vanaf het beginpunt van de boom. Omdat hier twee balletjes worden getrokken, heeft de kansboom twee 'lagen'. Het aantal lagen is gelijk aan het aantal getrokken balletjes.

Voorbeeld 1

In een groep van vier mannen en vijf vrouwen worden door loten drie taken (wassen, afwassen en auto wassen) verdeeld.

Als één persoon meerdere van die drie taken mag doen, hoe groot is dan de kans dat er twee taken door een man en één door een vrouw worden uitgevoerd?

Antwoord

Bijpassend vaasmodel:

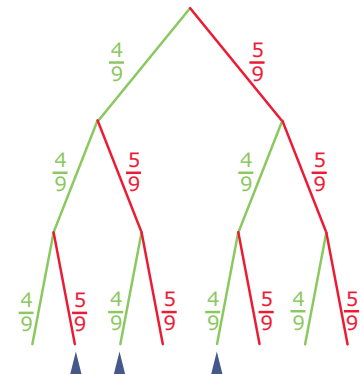
- vaas met negen balletjes, vier groen (mannen) en vijf rood (vrouwen);
- aselechte trekking van drie balletjes (aantal taken);
- met teruglegging (want elke persoon mag meerdere taken doen).

Daarbij hoort deze kansboom.

De routes waarbij twee taken door een man en één door een vrouw worden gedaan, zijn aangegeven.

De gevraagde kans is:

$$P(\text{mmv of mvm of vmm}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{240}{729} = \frac{80}{243}$$



Figuur 8

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1**. Er worden kansen berekend bij het door loting verdelen van drie taken onder vier mannen en vijf vrouwen.

- Waaruit blijkt dat het in dit voorbeeld gaat om trekking met terugleggen?
- Bereken de kans dat er twee taken door een vrouw en één door een man worden gedaan.
- Bereken de kans dat alle taken door een man worden gedaan.
- Bereken de kans dat er hoogstens twee vrouwen één van de drie taken moeten doen.

Opgave 7

Uit een vaas met twee groene en vier rode balletjes pak je tegelijk twee balletjes zonder te kijken. Je wilt de kans op rood en groen balletje berekenen.

- Leg uit waarom die kans $\frac{8}{30} + \frac{8}{30} = \frac{8}{15}$ is.

Je kunt dit ook heel anders aanpakken.

- Ga na dat uit zes balletjes vijftien verschillende paren balletjes zijn te kiezen.
- Bij hoeveel van die paren zijn de balletjes van verschillende kleur?
Laat zien dat je nu dezelfde kans krijgt

Voorbeeld 2

In een groep van vier mannen en vijf vrouwen worden door loten drie taken (wassen, afwassen en auto wassen) verdeeld.

Als elk van die drie taken door een andere persoon moet worden gedaan, hoe groot is dan de kans dat er twee taken door een man en één door een vrouw worden uitgevoerd?

Antwoord

Bijpassend vaasmodel:

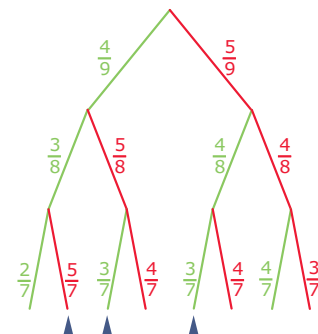
- vaas met negen balletjes, vier groen (mannen) en vijf rood (vrouwen);
- aselechte trekking van drie balletjes (aantal taken);
- zonder teruglegging (want elke persoon mag één taak doen en niet meer).

Daarbij hoort deze kansboom.

De routes waarbij twee taken door een man en één taak door een vrouw worden gedaan, zijn aangegeven.

De gevraagde kans is:

$$P(\text{mmv of mvm of vmm}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{180}{504} = \frac{5}{14}$$



Figuur 9

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 2**. Daarin worden kansen berekend bij het door loting verdelen van drie taken onder vier mannen en vijf vrouwen.

- Waaruit blijkt dat het in dit voorbeeld gaat om trekking zonder terugleggen?
- Bereken de kans dat er twee taken door een vrouw en één door een man worden gedaan.
- Bereken de kans dat alle taken door een man worden gedaan.
- Bereken de kans dat er hoogstens twee vrouwen één van de drie taken moeten doen.

Voorbeeld 3

Twee basketballers hebben een verschillend schotpercentage: A heeft een schotpercentage van 25% en B heeft een schotpercentage van 16%.

Beiden doen een doelpoging. Hoe groot is de kans op één treffer?

Antwoord

Voor een vaasmodel van deze situatie heb je nu twee vazen nodig:

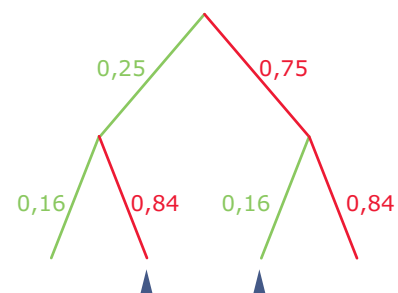
- voor A: een vaas met 100 balletjes, 25 groene (treffer) en 75 rode (misser)
- voor B: een vaas met 100 balletjes, 16 groene (treffer) en 84 rode (misser);
- aselechte trekking van één balletje uit elke vaas;
- teruglegging is nu niet relevant, want je trekt maar één balletje uit elke vaas.

Daarbij hoort deze kansboom.

De routes waarbij precies één keer wordt gescoord, zijn aangegeven.

Als X het aantal treffers is, dan is de gevraagde kans:

$$P(X = 1) = 0,25 \cdot 0,84 + 0,75 \cdot 0,16 = 0,33.$$



Figuur 10

Opgave 9

In **Voorbeeld 3** gaat het om kansen bij twee basketballers met een verschillend schotpercentage. Ze schieten elk één keer op de basket.

- a Hoe groot is de kans op twee treffers?
- b Hoe groot is de kans op geen enkele treffer?
- c Hoe groot is de kans op minstens één treffer?

Verwerken

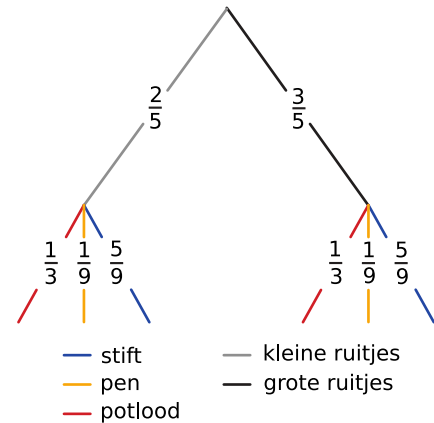
Opgave 10

Bekijk het boomdiagram.

Bas heeft in zijn tas vijf uiterlijk dezelfde schriften, twee met kleine ruitjes en drie met grote ruitjes. En hij heeft een etui met vijf stiften, één pen en drie potloden die allemaal dezelfde vorm hebben.

Bas pakt zonder te kijken een schrift en iets om mee te schrijven uit zijn tas.

Hoe groot is de kans dat dit een schrift met grote ruitjes en een stift zijn?



Figuur 11

Opgave 11

Joes en z'n zus Wieke mogen ieder een cadeautje uit een grabbelton pakken. In de grabbelton zitten acht grote cadeaus en drie kleine. Wieke pakt als eerste een cadeau en Joes daarna.

- a Maak een kansboom bij deze situatie.
- b Hoe groot is de kans dat Joes en Wieke beiden een klein cadeau hebben gepakt?
- c Hoe groot is de kans dat Wieke een groot cadeau en Joes een klein cadeau heeft gepakt?
- d Hoe groot is de kans dat Wieke en Joes samen een klein en een groot cadeau hebben gepakt?

Opgave 12

Arsenal speelt een thuiswedstrijd tegen Juventus. 50% van de bezoekers denkt dat Arsenal wint en $\frac{1}{3}$ deel denkt dat Juventus wint. Bij de returnwedstrijd rekt $\frac{1}{3}$ deel op winst voor Arsenal en $\frac{1}{3}$ op winst voor Juventus.

- a Maak een kansboom voor beide wedstrijden.
- b Hoe groot is de kans dat elk van beide teams één van de wedstrijden wint?

Opgave 13

Er wordt met drie dobbelstenen geworpen. Een kansboom kan nu erg groot worden. Misschien heb je er maar een stukje van nodig, of kun je een vaas in gedachten nemen?

- a Hoe groot is de kans dat je zeventien of achttien gooit?
- b Hoe groot is de kans dat je zestien gooit?
- c Hoe groot is de kans dat je minstens twee zessen gooit?
- d Voor de vraag naar het aantal zessen kun je een vaasmodel maken. Hoeveel kleuren gebruik je? Hoeveel balletjes van elke kleur heb je nodig?

Opgave 14

In een vaas zitten tien balletjes, zes van hout en vier van plastic. Van de houten balletjes zijn er vier rood en twee blauw. Van de plastic balletjes zijn er drie rood en is er één blauw. Op gevoel zijn hout en plastic niet te onderscheiden. Je trekt twee balletjes uit de vaas. Het gaat om de kleur en het materiaal van de getrokken balletjes. Neem aan dat het eerst getrokken balletje wordt teruggelegd.

- Bereken de kans dat je eerst een rood houten, dan een blauw plastic balletje trekt.
- Bereken de kans dat je een rood houten en een blauw plastic balletje trekt.
Neem nu aan dat het eerst getrokken balletje niet wordt teruggelegd.
- Bereken de kans dat je eerst een rood houten, dan een blauw plastic balletje trekt.
- Bereken de kans dat je een rood houten en een blauw plastic balletje trekt.
- Als het alleen om de kleur van de twee getrokken balletjes gaat, voldoet een kleinere kansboom. Teken die kansboom voor de gevallen met en zonder terugleggen.
- Bereken in elk van de twee gevallen de kans op twee verschillend gekleurde balletjes.
- De kans op twee verschillend gekleurde balletjes uit de vorige vraag is het grootst als je niet teruglegt. Verklaar dat.

Opgave 15

Er zijn twee taken te doen. Uit een groep van drie mannen en vijf vrouwen moeten twee personen worden geloot die de taken moeten uitvoeren.

Iemand zegt: 'De kans dat de tweede taak door een man wordt verricht, is gelijk aan de kans dat de eerste taak door een man wordt verricht, want je kunt net zo goed eerst voor de tweede taak loten.'

Bereken of hij gelijk heeft.

Toepassen

Opgave 16: Gomballen

De Grutter verkoopt zakjes met 16 gomballen. De bedoeling is dat in elk zakje 8 rode en 8 gele gomballen zitten. De vulmachine is niet zo precies, zodat dat maar voor de helft van de zakjes klopt.

In $\frac{1}{4}$ deel van de zakjes zitten 9 rode en 7 gele gomballen en in het resterende $\frac{1}{4}$ deel van de zakjes zitten 7 rode en 9 gele.

- Je kiest aselekt zo'n zakje en daaruit aselekt een gombal. Je denkt: rood en geel hebben dezelfde kans, dus de kans dat mijn gombal rood is, is 50%. Leg uit, dat dit inderdaad klopt.
- Je hebt zo'n zakje met 9 rode en 7 gele gomballen. Je eet achter elkaar 3 gomballen, willekeurig gepakt. Is de kans dat ze alle drie geel zijn groter dan 5%?
- Terwijl jij snoept, pikt iemand anders een rode gombal weg. De kans op 3 gele zal dan wel wat groter zijn. Ga na wanneer die het grootst is: als de rode gepikt wordt nadat jij de eerste op hebt of als dat na jouw tweede gombal gebeurt.

Testen

Opgave 17

In een vaas zitten 15 balletjes, 4 witte en 5 rode en 6 blauwe. Er wordt aselekt met terugleggen drie keer een balletje getrokken.

- Bereken de kans dat er drie keer een rood balletje wordt getrokken.
- Bereken de kans dat er twee rode balletjes worden getrokken.
- Bereken de kans dat alle balletjes een andere kleur hebben.

Opgave 18

In een vaas zitten 15 balletjes, 4 witte en 5 rode en 6 blauwe. Er wordt aselekt drie balletjes in één keer getrokken.

- a Bereken de kans dat er drie rode balletjes worden getrokken.
- b Bereken de kans dat er twee rode en één wit balletje worden getrokken.
- c Bereken de kans dat alle balletjes een andere kleur hebben.

Opgave 19

Ongeveer 1 op de 12 Nederlandse mannen is kleurenblind. Aan hun uiterlijk kun je dit niet zien. Een politieagent houdt een auto aan die door een rood stoplicht reed. Er blijken vier mannen in te zitten. Hij vraagt zich af hoe groot de kans is dat twee inzittenden kleurenblind zijn.

- a Maak een bijpassende kansboom.
- b Beantwoord de vraag van de politieagent. Geef het antwoord in vier decimalen nauwkeurig.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
