# 1.6 Totaalbeeld

## Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Kansen en tellen**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

## Begrippenlijst

- kansexperiment — gebeurtenis — experimentele kans — relatieve frequentie — simulatie
- aselect — theoretische kans — wet van de grote aantallen
- wegendiagram — boomdiagram — venndiagram
- $n$-faculteit — permutaties
- permutaties — combinaties — driehoek van Pascal

## Activiteitenlijst

- kansen bepalen op grond van kansexperimenten en/of simulaties
- kansen bepalen op grond van redeneringen met even waarschijnlijke mogelijkheden
- diagrammen gebruiken om mogelijkheden te tellen
- machten en faculteiten gebruiken om mogelijkheden te tellen
- mogelijkheden tellen met behulp van permutaties en combinaties en de driehoek van Pascal

## Achtergronden

Al heel lang beproeft de mens zijn geluk bij zogenaamde 'kansspelen'. In de prehistorie gokte men op de uitkomsten van het gooien met het 'sprongbeen', een vroege vorm van onze dobbelsteen. Bij opgravingen in Ur (een stad in het Oude Mesopotamië) is een bordspel teruggevonden en zijn dobbelstenen in de vorm van een viervlak aangetroffen. Later (veertiende eeuw na Christus) ontstonden kaartspelen. En natuurlijk konden verwoede gokkers inzetten op uitslagen van wedstrijden.
Het duurde echter tot de veertiende eeuw voordat wiskundigen zich met het gokken gingen bezighouden. Een eerste vraagstuk (wat voor het eerst in een Italiaans geschrift uit 1380) was het **partijenvraagstuk**. Dat luidde als volgt:

> Twee partijen spelen een balspel om punten. Ze hebben beide een even grote kans om een punt te scoren. Er is geen tijdsduur voor het spel vastgelegd en de partij die als eerste 6 punten gescoord heeft, wint de pot van 60 dukaten. Het spel moet (vanwege het weer) bij de stand 5-3 worden gestaakt. Er wordt besloten de pot te verdelen. De vraag is nu: hoe moet dat gebeuren?

De Italiaanse wiskundige **Pacioli** bedacht in 1494 dat de pot moest worden verdeeld in de verhouding 5:3 (de stand bij afbreken), maar zijn collega **Cardano** vond dat je rekening moest houden met de nog te scoren punten. In die tijd konden de wiskundigen geen bevredigende oplossing verzinnen.

## Testen

### Opgave 1

Iemand werpt met twee viervlaksdobbelstenen. Dergelijke dobbelstenen hebben de vorm van een regelmatig viervlak met daarop de getallen 1, 2, 3 en 4. Er wordt gelet op de som van de getallen die onder komen te liggen.

**a** Simuleer met behulp van toevalsgetallen veertig worpen met twee van die dobbelstenen. Hoe groot is de experimentele kans op 4?

**b** Hoe groot is de theoretische kans op 4?

## Opgave 2

De Toto is een spel waarbij je voetbaluitslagen voorspelt. Bij Toto13 voorspel je van dertien wedstrijden of de thuisclub wint, verliest of gelijkspeelt.

**a** Hoe groot is de kans dat je een wedstrijd juist voorspelt als je geen enkel verstand van voetbal hebt?

**b** Hoeveel verschillende Toto13 uitslagen zijn er in totaal mogelijk?

**c** Hoe groot is de kans dat je alle dertien wedstrijden goed voorspelt? Geef je antwoord in wetenschappelijke notatie.

**d** Hoeveel Toto13 uitslagen zijn er met slechts twee foute voorspellingen?

**e** Hoeveel Toto13 uitslagen zijn er met hoogstens twee foute voorspellingen?

**f** Hoe groot is de kans dat je hoogstens twee wedstrijden fout voorspelt? Geef je antwoord in wetenschappelijke notatie.

## Opgave 3

Een gezin bestaat uit vier personen: vader Jan, moeder Jannie, kinderen Wim en Maria. Twee van hen moeten de afwas doen. Wie dat zijn wordt bepaald door loting.

**a** Hoe groot is de kans dat beide kinderen de afwas moeten doen?

**b** Hoe groot is de kans dat beide mannelijke gezinsleden moeten afwassen?

## Opgave 4

Het dominospel bestaat uit 28 stenen. Elke steen bestaat uit twee helften. Op elke helft komen 0, 1, 2, 3, 4, 5, of 6 ogen voor. Je kiest aselect één steen.

**a** Laat zien waarom er 28 verschillende dominostenen zijn.

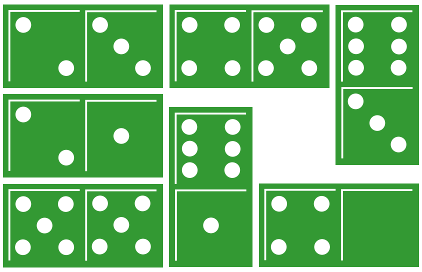
**b** Hoe groot is de kans dat je een ‘dubbele’ kiest (aan beide kanten evenveel ogen)?

**c** Hoe groot is de kans dat de som van het aantal ogen minstens 10 is?

**d** Hoe groot is de kans dat het verschil van het aantal ogen hoogstens 2 is?

**e** Hoe groot is de kans dat het grootste aantal ogen op een steen 3 is?

**f**



**Figuur 1**

Je speelt met Petra een spelletje domino. Jullie krijgen allebei zeven stenen. In de figuur zie je de stenen die je hebt gekregen.

Jij begint het spel met de ‘dubbel-vijf’. Hoe groot is de kans dat Petra kan aanleggen? Geef je antwoord in procenten.

## Opgave 5

Als je twee opeenvolgende verkiezingen voor de Tweede Kamer met elkaar vergelijkt, dan zie je dat mensen regelmatig van partij veranderen. Aan 415 Nederlanders die beide keren hebben gestemd, is gevraagd op welke partij dat was. De gegevens staan in de tabel. De categorie ‘overige’ wordt opgevat als één partij.
Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat een willekeurig gekozen ondervraagde:

| | | vorige keer | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | CDA | PvdA | VVD | D'66 | Overigen |
| deze keer | CDA | 55 | 2 | 0 | 3 | 5 |
| | PvdA | 3 | 71 | 6 | 3 | 8 |
| | VVD | 20 | 5 | 68 | 2 | 4 |
| | D'66 | 4 | 9 | 10 | 57 | 5 |
| | Overigen | 11 | 17 | 12 | 8 | 27 |

**Figuur 2**

**a** de vorige keer op het CDA stemde.

**b** deze keer op de PvdA stemt.

**c** weer op zijn eigen partij stemt.

**d** die de vorige keer op de PvdA stemde nu op het CDA stemt.

**e** die de vorige keer op D'66 stemde nu op een andere partij stemt.

## Opgave 6

De leerlingenraad bestaat uit 22 personen, verdeeld over diverse jaargroepen. Er zitten acht leerlingen uit de bovenbouw en veertien leerlingen uit de onderbouw in. Er moet een dagelijks bestuur worden gekozen van vijf personen (voorzitter, secretaris, penningmeester, vice-voorzitter en vice-secretaris).

**a** Op hoeveel manieren kun je dit dagelijks bestuur kiezen als men pas achteraf de functies onderling verdeelt?

**b** Op hoeveel manieren kun je dit dagelijks bestuur samenstellen als de leden in functie worden gekozen?

**c** Op hoeveel manieren kun je het dagelijks bestuur kiezen als het moet bestaan uit twee leerlingen uit de onderbouw en drie uit de bovenbouw?

**d** Op hoeveel manieren kun je het dagelijks bestuur kiezen als er minstens één onderbouwleerling deel van moet uitmaken?

**e** Op hoeveel manieren kun je het dagelijks bestuur kiezen als de voorzitter uit de bovenbouw moet komen?

## Opgave 7

Er worden voor Sinterklaas in een gezin van vier personen lootjes getrokken. Als iemand zijn eigen naam trekt moet er opnieuw worden geloot.

Hoe groot is de kans dat dit het geval is?

# Toepassen

## Opgave 8: Mantoux-reactie

Ongeveer 0,02% van alle mensen lijdt aan TBC (tuberculose). Om te onderzoeken of iemand met TBC is besmet wordt er vlak onder de huid een stof ingebracht waarop 98% van de mensen die aan TBC lijden positief reageert. Echter ook ongeveer 1% van de mensen die niet aan TBC lijden reageert er positief op. Deze test heet de Mantoux-test.

**a** Maak van de gegevens een tabel. Ga uit van 1.000.000 mensen.

**b** Iemand ondergaat deze Mantoux-test en reageert positief. Hoe groot is de kans dat hij niet aan TBC lijdt?

## Opgave 9: Erfelijkheidsleer

Een bekende toepassing van de kansrekening in de biologie is de **erfelijkheidsleer**. Een leeuwenbekje is een plantje dat zowel in de kleuren rood, wit als roze voorkomt. Het is verbazingwekkend dat witte en rode planten alleen roze nakomelingen krijgen, en dat van roze planten de nakomelingen wit, rood of roze zijn. Om dit te begrijpen moet je het een en ander weten van chromosomen, genen en celdeling en de **wetten van Mendel**. Maar ook van kansrekening.

Op chromosomen worden de erfelijke eigenschappen vastgelegd in de genen. Bij veel levende wezens horen bij iedere eigenschap twee genen, een gen van de moeder en een gen van de vader. Voor het leeuwenbekje bijvoorbeeld geldt:

- De kleur wordt bepaald door de genen R en r.
- Een rood leeuwenbekje heeft twee R-genen, is dus van het type RR.
- Een wit leeuwenbekje heeft twee r-genen, is dus van het type rr.
- Een roze leeuwenbekje is van het type Rr.

| wit \ rood | R | R |
|---|---|---|
| r | rR | rR |
| r | rR | rR |

| roze \ roze | r | R |
|---|---|---|
| r | rr | rR |
| R | rR | RR |

Figuur 3

In een kruisingstabel kun je zien wat er gebeurt als je een rood met een wit leeuwenbekje kruist. En zo kun je ook laten zien wat er gebeurt als je twee roze leeuwenbekjes kruist: de helft van de nakomelingen wordt weer roze, maar $\frac{1}{4}$ deel wordt rood en $\frac{1}{4}$ deel wordt wit.

Cavia's komen voor in drie kleuren, bruingeel, lichtgeel en wit. Die kleuren worden bepaald door een gen dat in twee typen voorkomt, te weten B en b. Een cavia van het type BB is bruingeel, een cavia van het type bb is wit, een cavia van het type Bb is lichtgeel.

**a** Een bruingele cavia wordt gekruist met een witte cavia. Stel de bijbehorende kruisingsmatrix op.

**b** Lichtgele cavia's worden onderling gekruist. Dit levert 134 bruingele, 265 lichtgele en 137 witte cavias op. Verklaar deze aantallen met behulp van een kruisingsmatrix.

**c** Wat kun je verwachten van de nakomelingen bij de kruising van een lichtgele en een witte cavia?

## Opgave 10: Het binomium van Newton

Het ‘binomium van Newton’ is een belangrijke stelling die zegt dat iedere term van de vorm $(a+b)^n$ geschreven kan worden als: $\binom{n}{0}\cdot a^n\cdot b^0+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^1+\binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}\cdot a^1\cdot b^{n-1}+\binom{n}{n}\cdot a^0\cdot b^n$.

Dus bijvoorbeeld is $(a+b)^1 = \binom{1}{0}\cdot a^1\cdot b^0+\binom{1}{1}\cdot a^0\cdot b^1 = a+b$;

$(a+b)^2 = \binom{2}{0}\cdot a^2\cdot b^0+\binom{2}{1}\cdot a^1\cdot b^1+\binom{2}{2}\cdot a^0\cdot b^2 = a^2+2ab+b^2$ enzovoort.

In deze opgave ga je Newton's binomium onderzoeken.

**a** Schrijf $(a+b)^3$ uit op de ‘oude’ manier (door haakjes weg te werken).

**b** Gebruik nu het binomium van Newton om $(a+b)^3$ uit te schrijven.

Je gaat nu de algemene stelling een beetje aannemelijk maken. Je hebt drie muntjes, ieder met de letters $a$ en $b$ aan weerszijden. Je werpt alle muntjes en bekijkt wat er boven komt.

**c** Hoeveel mogelijkheden zijn er?

**d** Ervan uitgaande dat de volgorde niet uitmaakt, welke mogelijkheden zijn er?

**e** Bij de mogelijkheden van c, hoeveel volgordes zijn er per mogelijkheid?

**f** Formuleer op grond van je antwoorden bij c, d en e een verklaring voor het binomium van Newton voor algemene $n$.

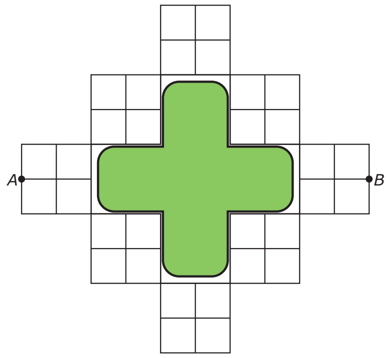
## Examen

### Opgave 11: Vijver

Hier zie je een plattegrond van paden rond een kruisvormige vijver. Een route van $A$ naar $B$ moet zo kort mogelijk zijn en mag niet buiten de paden leiden.

Hoeveel routes van $A$ naar $B$ zijn er mogelijk?

**(bron: examen wiskunde A havo 1989, eerste tijdvak)**




Figuur 4

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.