1.5 Permutaties en combinaties

Inleiding

Je hebt kennis gemaakt met systematisch tellen, zowel met behulp van diagrammen als met behulp van machten en faculteiten. De term ‘permutaties’ is al voorbij gekomen. Het aantal permutaties van 3 uit 8 is het aantal manieren om drie verschillende elementen uit een totaal van 8 te halen. Maar vaak heb je niet allemaal verschillende elementen, maar groepjes dezelfde elementen. Daar gaat het nu over.

Je leert in dit onderwerp

- onderscheid maken tussen permutaties en combinaties;
- het aantal combinaties van r uit n elementen berekenen;
- werken met de driehoek van Pascal.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen om mogelijkheden te tellen;
- machten en faculteiten toepassen bij telproblemen met of zonder herhaling;
- het aantal permutaties van r uit n elementen berekenen;
- werken met kansen.

Verkennen

Opgave V1

Acht hardlopers doen mee aan een wedstrijd over 100 meter. Ga ervan uit dat hun volgorde van aankomst uitsluitend van het toeval afhangt.

a Op hoeveel manieren kunnen deze acht hardlopers als eerste, als tweede en als derde aankomen?

b De eerste drie gaan door naar de volgende ronde. Hoeveel mogelijke drietallen zijn dat?

Uitleg

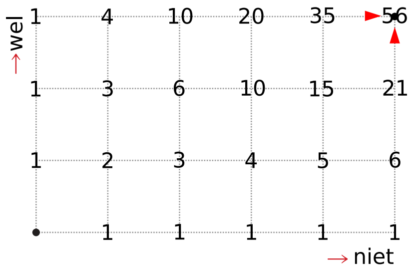
Bij de Olympische Spelen is de 100 m hardlopen een vast onderdeel. In de finale starten 8 lopers, zeg A, B, C, D, E, F, G en H. Ze strijden om goud, zilver of brons. Ga er vanuit dat alle lopers gelijkwaardig zijn. Je weet het aantal volgordes waarin alle hardlopers over de finish kunnen komen, permutaties dus: 8!.
Hoeveel mogelijke lijstjes met drie medaillewinnaars kun je maken?

Het gaat hier om het aantal volgordes van 3 uit 8 waarbij de uiteindelijke volgorde van belang is: $8 \cdot 7 \cdot 6 = {}_8\text{P}_3 = 336$ mogelijkheden.

Maar in de voorrondes van de Spelen is het niet belangrijk of je nummer 1, nummer 2 of nummer 3 bent: de eerste drie gaan door naar de volgende ronde. De lijstjes BDG, BGD, DBG, GBD, DGB en GDB hebben dan allemaal hetzelfde resultaat. Dat zijn er 6 in totaal. Die tellen dan dus niet als afzonderlijke mogelijkheden, maar vormen samen één mogelijkheid. En dat geldt ook voor alle andere drietallen: de volgorde binnen die drietallen is niet belangrijk en die 6 (dus 3!) volgordes tellen telkens maar als één mogelijkheid mee. Dit betekent dat er geen 336 mogelijke lijstjes zijn, maar slechts 336 gedeeld door 3!, dus 56.

Dat kun je weergeven in een rooster van 3 bij 5. Elk element van de groep van 8 hoort dan wel of niet bij het uitverkoren drietal, je beweegt in het rooster alleen naar rechts (niet gekozen) of omhoog (wel gekozen).

Als je alle 8 hardlopers bij langs loopt en beslist of je hem/haar uitkiest, waarbij je er 3 kiest en 5 niet, krijg je een route in dit rooster. Op hoeveel manieren kun je dit doen?



Figuur 1

Bedenk dat het aantal routes dat in elk punt bij elkaar komt telkens het aantal routes is, dat in het punt eronder en in het punt er links naast bij elkaar komt, bij elkaar opgeteld. Het is de som van de routes van de twee voorgangers.
Het aantal mogelijke (kortste) routes van linksonder naar rechtsboven is gelijk aan het aantal groepjes van 3 uit 8. En dat zijn inderdaad 56 combinaties.

Opgave 1

Bestudeer in het **Practicum** hoe je je grafische rekenmachine kunt gebruiken bij telproblemen.

a Bereken zelf met de hand het aantal combinaties van 3 uit 8.

b Controleer het antwoord met de rekenmachine.

c Bereken eerst met de hand het aantal combinaties van 3 uit 100. Controleer het antwoord met de rekenmachine.

Opgave 2

Bekijk weer de **Uitleg**.

a Maak zelf een rooster voor het aantal besturen van 4 leden dat je uit 6 kandidaten kunt samenstellen.

b Bereken het aantal besturen van 4 leden uit 6 kandidaten met faculteiten.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als je 3 elementen *zonder terugleggen* trekt uit 8 *verschillende* elementen en van de getrokken elementen is de *volgorde belangrijk*, dan heb je

$8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{8!}{5!} = {}_8\mathrm{P}_3 = 336$

mogelijke uitkomsten.

Korter gezegd: Het aantal **permutaties** van r uit n elementen is: ${}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Als de volgorde van de getrokken elementen er niet toe doet, zijn er minder mogelijke uitkomsten. Bij 2 getrokken elementen is het aantal mogelijke uitkomsten een factor 2 kleiner, bij 3 getrokken elementen een factor $3! = 6$, bij 4 getrokken elementen een factor $4! = 24$, en zo voort.

Als je 3 elementen *zonder terugleggen* trekt uit 8 *dezelfde of (gedeeltelijk) verschillende* elementen en van de getrokken elementen is de *volgorde niet belangrijk*, dan heb je

$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{8!}{5!} \cdot \frac{1}{3!} = 336 \cdot \frac{1}{6} = 56$

mogelijke uitkomsten.

Korter gezegd: Het aantal **combinaties** van r uit n elementen is: ${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \frac{1}{r!}$.

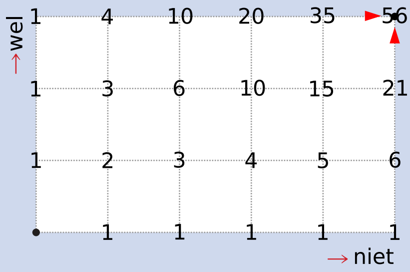
Het aantal combinaties van 3 uit 8 wordt ook geschreven als $\binom{8}{3}$ en uitgesproken als ‘ 8 boven 3’.

Combinaties kun je ook anders bekijken. Bij het aantal combinaties van 3 uit 8 gaat het er eigenlijk om de groep van 8 te verdelen in twee subgroepen, één van 3 en één van 5. Er geldt dus ${}_8\mathrm{C}_3 = {}_8\mathrm{C}_5$ en algemener: ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$.

Je kunt het aantal combinaties ook berekenen met een wel/niet rooster. Het aantal kortste routes naar het punt (5,3) tel je vanuit het punt linksonder naar het punt rechtsboven door het aantal routes vanaf ieder eerder gepasseerd punt op te tellen: 56.

Berekening geeft: ${}_8C_3 = \binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)!} \cdot \frac{1}{3!} = 56$.

Bekijk in het **Practicum** hoe dit met je grafische rekenmachine gaat.



Figuur 2

Voorbeeld 1

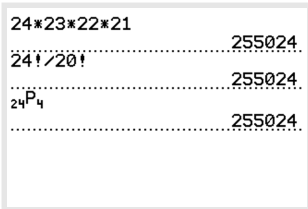
In een klas van 24 personen wordt door loting een groep van vier personen samengesteld. Deze vier personen krijgen elk een andere taak.
Op hoeveel manieren kan dit als er per taak wordt geloot?

Antwoord

Nu is de volgorde in de groep die wordt geloot van belang: ben je als eerste ingeloot dan heb je een andere taak dan wanneer je als tweede, of derde of vierde wordt ingeloot.

Het gaat nu dus om het aantal permutaties van 4 uit 24.

Er zijn daarom $24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = \frac{24!}{(24-4)!} = \frac{24!}{20!} = 255024$ mogelijkheden.



Figuur 3

Opgave 3

Je hebt een groep van twintig personen; acht mannen en twaalf vrouwen.

a Uit de groep van twintig worden door loting vijf personen aangewezen. Elk van hen krijgt een andere opdracht.
Op hoeveel manieren kunnen de opdrachten verdeeld worden?

b Nu worden de vijf opdrachten (genummerd 1 tot en met 5) verdeeld tussen de mannen en vrouwen: drie van de vrouwen doen opdracht 1, 2 en 3, en twee van de mannen doen 4 en 5. De opdrachten worden willekeurig toegewezen.
Op hoeveel manieren kan dat?

Voorbeeld 2

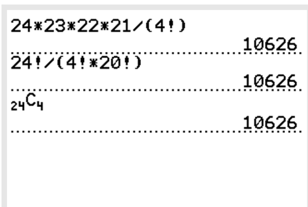
In een klas van 24 personen wordt door loting een groep van vier personen gekozen. Deze vier personen krijgen elk een andere taak.
Op hoeveel manieren kan dit als deze vier personen pas na de loting hun taken onderling verdelen?

Antwoord

Nu is de volgorde in de groep die wordt geloot niet van belang: ze verdelen pas na de loting onderling hun taken.

Het gaat nu dus om het aantal combinaties van 4 uit 24.

Er zijn daarom $\binom{24}{4} = \frac{24!}{4! \cdot (24-4)!} = \frac{24!}{4! \cdot 20!} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{4!} = 23 \cdot 22 \cdot 21 = 10626$ mogelijkheden.



Figuur 4

Opgave 4

Je hebt een groep van twintig personen, acht mannen en twaalf vrouwen.

Uit de groep van twintig worden door loting vijf personen gehaald. Elk van hen krijgt een bepaalde opdracht.
Op hoeveel manieren kan dat als ze de opdrachten na de loting onderling verdelen?

Voorbeeld 3

Uit een groepje van vijf meisjes en vier jongens kies je door loting een drietal.
Hoe groot is de kans dat daar minstens twee meisjes bij zijn?

Antwoord

Dit rooster laat het totaal aantal combinaties van 3 uit 9 zien.

Dat zijn er $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = 84$.

(Je kunt dit ook uittellen is het rooster.)

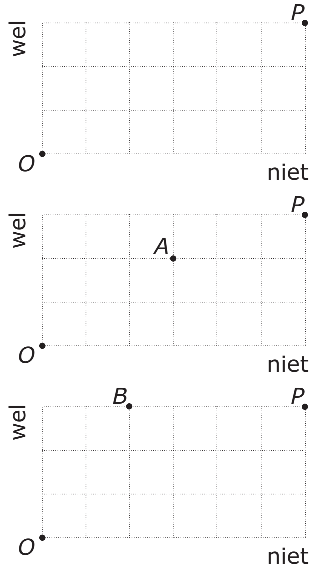
Als er precies 2 meisjes bij moeten zijn, dan kun je bijvoorbeeld eerst 2 van de 5 meisjes kiezen en vervolgens 1 van de 4 jongens.
Het aantal (kortste) routes gaat dan via A.

Van O naar A zijn er $\binom{5}{2} = 10$ mogelijke routes en bij elk van deze routes

zijn er van A naar P nog eens $\binom{4}{1} = 4$ mogelijke routes.

Dat zijn in $10 \cdot 4 = 40$ mogelijke routes.

Als er precies 3 meisjes bij moeten zijn, dan kun je bijvoorbeeld eerst 3 van de 5 meisjes kiezen en vervolgens geen van de 4 jongens.
Het aantal (kortste) routes gaat dan via B.



Figuur 5

Van O naar B zijn er $\binom{5}{3} = 10$ mogelijke routes en bij elk van deze routes

is er van B naar P nog maar 1 mogelijke route.
Dat zijn $10 \cdot 1 = 10$ mogelijke routes.

In totaal zijn er $40 + 10 = 50$ routes met 2 of 3 gekozen meisjes van de 84 mogelijke routes.

De gevraagde kans is dus $\frac{50}{84}$.

Opgave 5

Gegeven is een groep van twintig mensen: acht mannen en twaalf vrouwen.

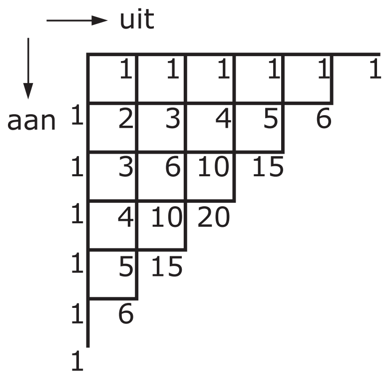
a Op hoeveel manieren kun je door loting een groep van vijf samenstellen die bestaat uit drie mannen en twee vrouwen?

b Hoe groot is de kans op een groep van vijf, bestaande uit drie mannen en twee vrouwen?

c Op hoeveel manieren kun je door loting een groep van vijf samenstellen die bestaat uit hoogstens drie mannen?

Opgave 6

Ga uit van een systeem met zeven schakelaars die allemaal 'aan' of 'uit' kunnen staan. Je ziet hier in een roosterdiagram alle mogelijkheden weergegeven.



Figuur 6

a Op hoeveel manieren kun je nul van de zeven schakelaars aanzetten?

b Op hoeveel manieren kun je één van de zeven schakelaars aanzetten?

c Op hoeveel manieren kun je twee van de zeven schakelaars aanzetten?

d Het aantal manieren om drie van de zeven schakelaars aan te zetten is gelijk aan het aantal manieren om er vier van de zeven aan te zetten. Leg uit waarom dat zo is.

e Hoeveel mogelijkheden om zeven schakelaars aan of uit te zetten zijn er in totaal?

f Waarom is $\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 2^7$?

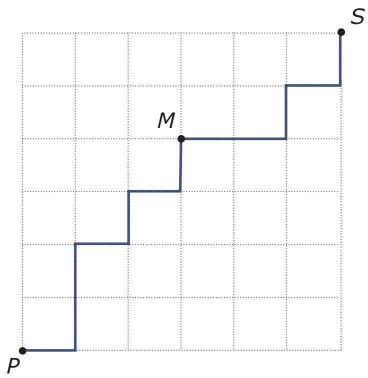
Opgave 7

Gebruik dit roosterdiagram.

a Hoeveel kortste routes zijn er van P naar M?

b Hoeveel kortste routes zijn er van M naar S?

c Hoeveel kortste routes zijn er van P naar S via M?

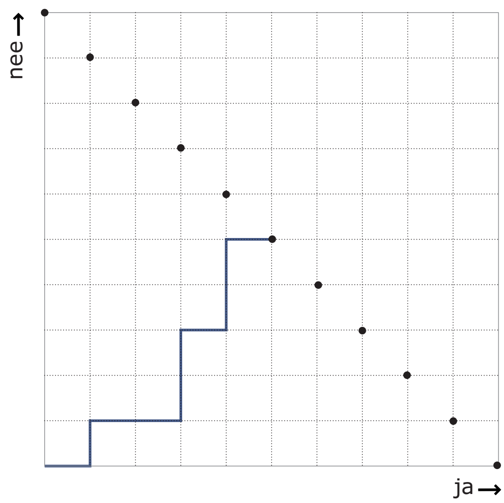


Figuur 7

Verwerken

Opgave 8

Iemand moet 10 vragen met 'ja' of 'nee' beantwoorden. In de figuur is een mogelijke lijst antwoorden in een rooster weergegeven met behulp van een lijn. Je ziet dat op vraag 1 'ja' gezegd is, de lijn is horizontaal.



Figuur 8

a Wat is bij die lijst het antwoord op vraag 6?

b Hoeveel lijsten met antwoorden zijn er mogelijk met precies drie keer ‘ja’?

c Hoeveel lijsten met antwoorden zijn er in totaal mogelijk?

d Hoe groot is de kans dat je alle vragen goed beantwoordt als je dat volledig op de gok doet?

Opgave 9

Voor een schaaktoernooi hebben zich 24 deelnemers gemeld. Ze spelen een halve competitie, dus elke deelnemer speelt precies één maal tegen iedere andere deelnemer. Het aantal wedstrijden kan nu worden berekend met behulp van combinaties.

Leg uit waarom dat zo is en bereken het aantal te spelen wedstrijden.

Opgave 10

Je gooit met vijf verschillende geldstukken en je let op het aantal keren ‘kop’.

a Hoeveel uitkomsten zijn er mogelijk?

b Hoeveel mogelijke worpen met precies twee keer ‘kop’ zijn er?

c Hoe groot is de kans op precies twee keer ‘kop’?

Je gooit nu met 50 geldstukken.

d Hoe groot is de kans op 20 keer ‘kop’?

Opgave 11

Een groep bestaat uit veertien meisjes en twaalf jongens. Er wordt een groepje van vier door loting uitgekozen.

a Als het groepje uitsluitend uit meisjes moet bestaan, hoeveel verschillende groepjes zijn er dan mogelijk?

b Beantwoord dezelfde vraag als het groepje uit twee jongens en twee meisjes moet bestaan.

Opgave 12

Je wilt acht verschillende boeken op een boekenplank sorteren.
Op hoeveel manieren kun je de boeken neerzetten als geldt:

a Iedere volgorde is toegestaan.

b De drie wiskundeboeken moeten bij elkaar staan.

c De twee woordenboeken moeten op het rechtereind van de rij naast elkaar staan.

d Er worden drie boeken uitgekozen om te worden gekaft en dan naast elkaar aan een uiteinde gezet. (Gekafte boeken beschouwen we niet als onderling verschillend.)

Opgave 13

Je werpt met drie dobbelstenen en let op het aantal ogen dat boven komt.

a Hoeveel verschillende uitkomsten zijn er mogelijk?

b Je kunt op verschillende manieren 12 ogen gooien. Bijvoorbeeld door driemaal 4 te gooien, maar ook door een 6 en tweemaal 3 te gooien.
Bereken bij elke mogelijkheid de bijbehorende kans.

Toepassen

Opgave 14: Filmavond

Een groep vrienden houdt een filmavond. Ze zijn fans van drie genres films, en hebben uit die genres aardig wat films om te kiezen. Om precies te zijn: 29 Godzillafilms, vijf comedies, en twaalf tekenfilms. Ze kiezen drie films uit. Bij de vragen staan verschillende voorwaarden. Bereken telkens het aantal mogelijke drietallen.

a Het maakt niet uit uit welk van de drie groepen de films komen, of in welke volgorde ze gekeken worden, er worden er gewoon drie gekozen.

b Er wordt uit ieder genre een film gekeken, maar het maakt niet uit in welke volgorde.

c Er worden twee Godzillafilms gekeken en een willekeurige derde van een ander genre, en het maakt wel uit in welke volgorde.

d Er worden ofwel drie Godzilla films, ofwel drie comedies, ofwel drie tekenfilms gekeken, maar in ieder geval wordt dan wel het willekeurige drietal gesorteerd op volgorde van jaartal. Ga er hier van uit dat er per groep niet meerdere films uit hetzelfde jaar komen.

Testen

Opgave 15

Een volleybalteam bestaat uit twaalf spelers. De coach bepaalt welke spelers worden opgesteld en welke van de zes posities in het veld zij innemen.

a Als alle spelers even sterk zijn en op elke positie kunnen spelen, op hoeveel manieren kan de coach dan een team van zes samenstellen?

b Als hij dat team heeft samengesteld, hoeveel verschillende beginopstellingen kan hij dan nog maken?

Opgave 16

Een klas bestaat uit 26 leerlingen.

a Op hoeveel manieren kun je al die leerlingen op een rij zetten?

b Op hoeveel manieren kun je vijf van de 26 leerlingen op een rij zetten?

c Op hoeveel manieren kun je een groepje van vijf uit de 26 kiezen?

d Er zitten tien meisjes in deze klas. Op hoeveel manieren kun je een groepje van vijf leerlingen kiezen als daar precies twee meisjes in moeten voorkomen?

Practicum

Met de volgende practica kun je leren hoe je met de grafische rekenmachine met faculteiten kunt werken. Verder wordt er beschreven hoe permutaties en combinaties snel kunnen worden berekend.

- **Simulaties en de TI84**
- **Simulaties en de TInspire**
- **Simulaties en de Casio fx-CG50**
- **Simulaties en de HPprime**
- **Simulaties en de NumWorks**

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.