

1.3 Systematisch tellen

Inleiding

Bij het beredeneren van kansen speelt het tellen een belangrijke rol. Immers je deelt het aantal 'gunstige' mogelijkheden door het totaal aantal mogelijkheden. Maar dan moet je wel weten hoeveel mogelijkheden er zijn en vaak ook nog welke dat zijn. Om daar een goed overzicht over te krijgen moet je systematisch te werk gaan. Boomdiagrammen en tabellen helpen er bij.

Je leert in dit onderwerp

- kansen bepalen op grond van redeneren met even waarschijnlijke mogelijkheden;
- mogelijkheden systematisch tellen en in kaart brengen.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen;
- werken met kansen.

Verkennen

Opgave V1

Je werpt vier geldstukken op tafel.

Hoe groot is de kans dat je drie keer kop en één keer munt, of drie keer munt en één keer kop krijgt?



Figuur 1

Uitleg 1

Bij tossen wordt er met een geldstuk geworpen. Het werpen met een geldstuk heeft de uitkomsten 'kop' of 'munt'. Bij een zuivere munt zijn beide uitkomsten even waarschijnlijk en hebben ze beiden een kans van $\frac{1}{2}$.

Gooi je met meerdere munten en kijk je naar het aantal keren 'kop', dan kun je dat aantal aangeven met X . Gooi je met vier munten dan heeft X de waarden 0, 1, 2, 3 of 4.

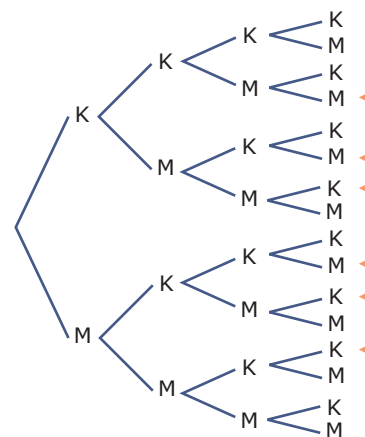
Om de bijbehorende kansen te kunnen berekenen, moet je het aantal gunstige en het totaal aantal mogelijkheden overzichtelijk bijhouden. Dat kun je doen met een boomdiagram.

Alle zestien mogelijkheden hebben dezelfde kans.

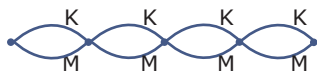
Ga na, dat $P(X = 2) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Een boomdiagram maken kan veel werk zijn, maar in veel gevallen hoef je maar een klein stukje te tekenen om te zien hoe je de kansen berekent.

Je kunt een boomdiagram compacter maken door de takken in één punt te laten samenkomen. Dan krijg je een wegendiagram. Daarin zie je snel dat er $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ mogelijkheden in totaal zijn. Alleen zijn de gunstige mogelijkheden nu moeilijker te tellen.



Figuur 2



Figuur 3

Opgave 1

Bestudeer **Uitleg 1**.

- Wat is het verschil tussen een boomdiagram en een wegendiagram?
- Wanneer is een boomdiagram makkelijker, en wanneer een wegendiagram?

Opgave 2

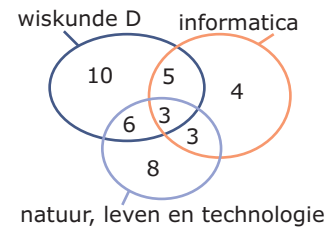
Je hebt in een hoge hoed vier kaartjes met daarop de letters A, B, C, D. Je haalt die kaartjes er aselekt één voor één uit.

Bereken de kans dat je dit in de volgorde A-B-C-D doet.

Uitleg 2

Als leerlingen een vakkenpakket kiezen, kun je dat bekijken als meerdere keren een ja/nee beslissing nemen. Voor 2 of 3 van dat soort beslissingen kan een venndiagram een goed overzicht geven van alle keuzes.

In het voorbeeld is te zien dat van 39 leerlingen die de keuzevakken wiskunde D, informatica, of natuur, leven en technologie (NLT) of een combinatie van deze drie vakken doen, er 10 alleen wiskunde D doen, 6 wiskunde en NLT doen, 5 wiskunde en informatica doen, 3 informatica en NLT doen en 3 alledrie de vakken doen. Er zijn nog 4 die alleen informatica volgen en 8 die alleen NLT hebben.



Figuur 4

Wanneer je een venndiagram maakt, is vaak een deel van de aantallen uitkomsten/keuzes gegeven. De andere aantallen keuzes kun je dan berekenen.

Opgave 3

Bestudeer de figuur in **Uitleg 2**.

- Hoeveel leerlingen doen NLT?
- Hoeveel leerlingen doen alleen NLT?
- Hoeveel leerlingen doen twee keuzevakken?

Opgave 4

Gegeven zijn de verzamelingen A tot en met D . Maak een venndiagram dat het aantal elementen per verzameling (al dan niet in de overlappingsen met anderen) weergeeft.

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$D = \{8, 10, 12\}$$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Het berekenen van kansen is meestal een kwestie van systematisch tellen van mogelijkheden die even waarschijnlijk zijn. Daarvoor bestaan grafische hulpmiddelen:

Het boomdiagram:

Een schema waarin je alle mogelijkheden weergeeft als vertakkingen vanuit punten. Een boomdiagram kun je altijd maken, maar het kan heel veel werk zijn. Dit boomdiagram heeft twee 'lagen' met in de eerste laag twee takken en in de tweede laag drie takken.

In een boomdiagram zie je alle mogelijke uitkomsten. Het totaal aantal mogelijke uitkomsten kun je berekenen door de aantallen in de verschillende lagen met elkaar te vermenigvuldigen.



$2 \times 3 = 6$ mogelijkheden

Figuur 5

Het wegendiagram:

Een schema (ook wel graaf genoemd) waarin je de mogelijkheden als verbindingen tussen punten weergeeft. Een wegendiagram is een samenvatting van een boomdiagram. Het samenvatten gaat alleen goed als de uitkomsten van de lagen niet van elkaar afhangen. Het tekenen is sneller dan een boomdiagram, maar je kunt er niet alle kansvragen goed mee beantwoorden. Het totaal aantal mogelijkheden krijg je door de aantallen mogelijkheden om van punt naar punt te komen met elkaar te vermenigvuldigen.

Een rooster:

Dit is een andere manier van een boomdiagram tekenen. Het kan alleen als er maar twee lagen zijn en alle uitkomsten staan er in. Dit rooster laat het aantal even waarschijnlijke mogelijkheden bij werpen met twee geldstukken zien.

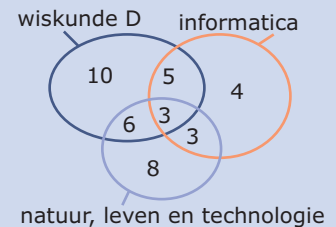
Het aantal mogelijke uitkomsten is te berekenen door het aantal vakjes te tellen.

	K	M
K	KK	KM
M	MK	MM

Figuur 6

Het venndiagram:

Een schema dat je gebruikt als verschillende eigenschappen elkaar overlappen, zodat iets meerdere eigenschappen tegelijk kan hebben. Denk maar aan de keuzemogelijkheden voor drie keuzevakken binnen de vrije ruimte van je keuzepakket op school.



Figuur 7

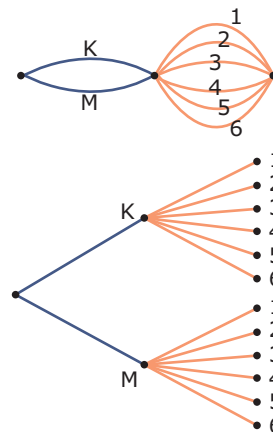
Voorbeeld 1

Iemand gooit tegelijkertijd met een munt en met een dobbelsteen.
Hoeveel mogelijke even waarschijnlijke uitkomsten zijn er in totaal?
En bij hoeveel daarvan heb je hoogstens vijf ogen en kop?

Antwoord

De mogelijke uitkomsten kun je in een wegendiagram weergeven.
Er zijn in totaal $2 \cdot 6 = 12$ verschillende uitkomsten mogelijk, want je kunt in totaal op twaalf verschillende manieren van het beginpunt naar het eindpunt gaan.

Je ziet ook hoe je de mogelijke uitkomsten van het gelijktijdig gooien van een munt en een dobbelsteen in een boomdiagram kunt weergeven. Alle twaalf mogelijkheden zijn afzonderlijk zichtbaar. Er zijn vijf mogelijkheden met hoogstens (niet meer dan) vijf ogen en kop.



Figuur 8

Opgave 5

Iemand heeft dobbelstenen in de vorm van een regelmatig viervlak. Op de grensvlakken staan de cijfers 1, 2, 3 en 4. Elk vlak heeft een gelijke kans om 'onder' te komen als je met zo'n dobbelsteen gooit. Er wordt geworpen met drie van die dobbelstenen, een rode, een groene en een witte. We letten op de vlakken die 'onder' komen na het werpen.

- Geef in een wegendiagram alle mogelijke uitkomsten weer. Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?
- Tel het aantal uitkomsten waarbij bij de rode dobbelsteen het cijfer 3 precies één keer onder ligt.
- Hoeveel mogelijkheden zijn er waarbij precies één keer de 3 onder ligt?
- Hoe groot is de kans dat er precies één 3 onder ligt?

Voorbeeld 2

Iemand gooit tegelijkertijd met twee dobbelstenen. Als je van te voren het totaal aantal ogen goed raadt, win je het spelletje.

Waarom kun je beter gokken op zeven ogen dan op twee ogen?

Antwoord

Omdat je met twee dobbelstenen werpt, is een rooster een handige manier om alle mogelijkheden in beeld te krijgen.

Je ziet dat er in totaal 36 even waarschijnlijke mogelijkheden zijn. En zeven ogen komt veel vaker voor dan twee ogen.

Je ziet dat zeven ogen het vaakst voorkomt, dus daar moet je op gokken.

	X					
Y	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figuur 9

Opgave 6

Bij het werpen met twee dobbelstenen kun je de mogelijkheden overzichtelijk weergeven in een rooster.

- Waarom gaat dat bij het werpen met drie dobbelstenen niet?
- Je werpt met twee dobbelstenen. Hoe groot is de kans dat er minstens negen ogen boven komen?

Opgave 7

Je hebt vier uiterlijk gelijke briefjes met daarop de namen Paul, Anja, Frits en Elly. De briefjes worden in een vaas gedaan, je moet er twee kiezen. De briefjes gaan na de eerste trekking niet terug in de vaas.

- Teken bij deze situatie een rooster.
- Laat zien dat een boomdiagram dezelfde mogelijkheden geeft.
- Bepaal de kans dat je zowel Paul als Anja kiest.

Voorbeeld 3

Op een school kiezen 26 havo4-leerlingen het NT-profiel. In de vrije ruimte kunnen ze één, twee of drie vakken kiezen uit: wiskunde D, informatica en NLT (natuur, leven en technologie).

Zestien leerlingen kiezen wiskunde D, twaalf kiezen informatica en veertien kiezen NLT.

Er zijn dertien leerlingen die maar één van deze drie vakken kiezen.

Drie leerlingen kiezen wiskunde D en NLT, acht leerlingen kiezen wiskunde D en informatica, waarbij de drie leerlingen zitten die alle drie de vakken kiezen.

Hoeveel leerlingen kiezen alleen NLT en informatica?

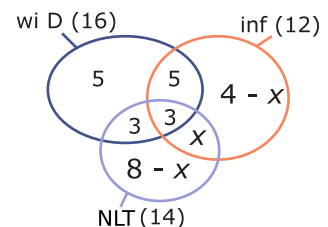
Antwoord

Een venndiagram kan helpen. Het gevraagde aantal leerlingen dat alleen NLT en informatica kiest stel je voor door x . Daarmee kun je het venndiagram invullen.

Nu zijn er dertien leerlingen die maar een van deze drie vakken hebben, dus: $5 + 8 - x + 4 - x = 13$.

Dit levert op: $x = 2$.

Ter controle kun je het hele diagram invullen.



Figuur 10

Opgave 8

Op een school kiezen 38 vwo leerlingen een NG-profiel. In de vrije ruimte kunnen ze één, twee of drie vakken kiezen: natuurkunde, NLT (natuur, leven en technologie) of aardrijkskunde. 27 leerlingen kiezen natuurkunde, 18 kiezen NLT en 24 kiezen aardrijkskunde. Verder kiezen 8 leerlingen natuurkunde en NLT, 11 kiezen natuurkunde en aardrijkskunde en 4 kiezen NLT en aardrijkskunde.

- Hoeveel leerlingen kiezen drie vakken?
- Hoe groot is de kans dat een leerling alleen maar aardrijkskunde heeft gekozen?

Verwerken

Opgave 9

Om het cijferslot van een koffer open te krijgen moet je een code van vier cijfers onthouden, waarbij de getallen 0 tot en met 9 voor elk cijfer mogelijk zijn.

- Je weet alleen het eerste cijfer nog. Hoe groot is de kans dat je de koffer direct open krijgt?
- Je weet alle vier de cijfers nog, maar de volgorde niet meer. De cijfers in de code zijn onderling verschillend. Hoe groot is de kans dat je de koffer direct open krijgt?

Opgave 10

Je werpt met drie gewone dobbelstenen.

- Geef in een wegendiagram alle mogelijke uitkomsten weer.
- Hoe groot is de kans op precies één zes?
- Hoe groot is de kans op twee zessen?
- Hoe groot is de kans op drie zessen?
- Hoe groot is de kans op minstens twee zessen?
- Hoe groot is de kans op hoogstens twee zessen?

Opgave 11

Een deelnemer aan een tv-quiz krijgt vier kaarten met op ieder een naam van een populaire zangeres. Zijn opdracht is om deze kaarten onder de foto's van deze zangeressen te hangen, de juiste naam bij elke foto. Deze deelnemer kent geen van de vier zangeressen en besluit op goed geluk de kaarten op te hangen.

- Geef in een boomdiagram alle mogelijkheden weer.
- Hoe groot is de kans dat hij één kaart goed hangt?
- Hoe groot is de kans dat hij alle kaarten goed hangt?

Opgave 12

Een fabrikant van consumptie-ijs probeert drie smaken uit. Het gaat om de smaken 'aardbeien', 'banaan' en 'citroen'. Hij laat een onderzoek instellen onder 170 willekeurig gekozen mensen. Tien ondervraagden waarderen alle drie de smaken positief. Acht mensen waarderen geen enkele smaak positief. De andere positieve oordelen zijn als volgt:

- alleen aardbeien 42
- alleen banaan 49
- alleen citroen 41
- alleen aardbei en banaan 5
- alleen aardbei en citroen 7
- er zijn ook mensen die alleen citroen en banaan lekker vinden.

- Maak een venndiagram van deze gegevens en bereken hoeveel mensen alleen citroen en banaan lusten.
- Hoeveel procent van de ondervraagden had een positief oordeel over banaan of citroen? Rond af op één decimaal.
- Hoeveel mensen hadden een negatief oordeel over zowel aardbeien als banaan?
- Hoe groot is de kans dat een willekeurige ondervraagde niet van aardbeienijs houdt? Geef je antwoord als getal tussen 0 en 1. Rond af op twee decimalen.

Opgave 13

Een toets bestaat uit zes meerkeuzevragen. Op elke meerkeuzevraag kun je uit vier antwoorden kiezen; er is telkens maar één antwoord goed.

- Hoeveel mogelijke series antwoorden zijn er?
- Je was de toets vergeten te leren en vult volkomen willekeurig zes antwoorden in. De docent kijkt de toets na en zegt: Je hebt vier vragen goed beantwoord! Hoeveel mogelijke series antwoorden zijn er, waarbij je er vier goed hebt?
- Als je alleen let op 'goed' of 'fout' en je moet alle zes vragen beantwoorden, hoeveel series antwoorden zijn dan mogelijk?

Opgave 14

Een fruitautomaat heeft drie vensters waarachter banden met plaatjes draaien. Op elke band staan twintig plaatjes en je brengt ze in beweging door aan een hendel te trekken. Eén druk op de knop en de banden stoppen. Zie je nu drie dezelfde plaatjes dan win je een bepaald bedrag. Van de plaatjes is per band het aantal op die band aangegeven.

plaatje	band 1	band 2	band 3
BAR	1	2	1
bel	8	1	7
pruim	2	7	3
sinaasappel	2	8	4
twee kersen	7	2	0
citroen	0	0	5

Figuur 11

- Op hoeveel manieren kun je drie keer 'sinaasappel' krijgen?
- Op hoeveel manieren kun je drie keer 'twee kersen' krijgen?
- Hoe groot is de kans dat je iets wint?

- d Je krijgt de plaatjes 'bel', en twee keer 'pruim'. Op hoeveel manieren kun je deze combinatie van deze plaatjes krijgen?
- e Je krijgt de plaatjes 'bel', 'sinaasappel' en 'citroen'. Op hoeveel manieren kun je deze combinatie van plaatjes krijgen?
- f Hoeveel samenstellingen van drie verschillende plaatjes bestaan er?

Toepassen

Opgave 15: Yahtzee

Bij het dobbelspel Yahtzee gooi je met vijf dobbelstenen. Bij dit spel kun je afhankelijk van het aantal ogen op de dobbelstenen op een scoreformulier een puntentotaal noteren.

- a Hoeveel mogelijke uitkomsten zijn er bij het gooien met vijf dobbelstenen?
- b Eén van de worpen die punten oplevert, is Grote Straat. Bij deze worp gooi je vijf opeenvolgende nummers. Hoeveel manieren zijn er om in één worp met vijf dobbelstenen Grote Straat te gooien?

Figuur 12

Testen

Opgave 16

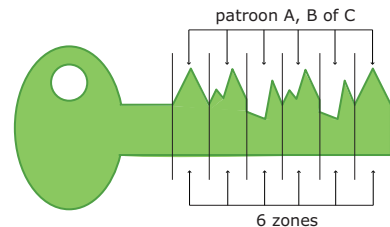
Op vakantie naar de zon neem je vooral luchtige kleding mee. Bijvoorbeeld: twee paar schoenen, zes paar sokken, vier korte broeken en vijf shirts.

- a Teken een wegendiagram van alle mogelijke combinaties van schoenen, sokken, broek en shirt.
- b Op hoeveel verschillende manieren kun je je zomers kleden?
- c Op het strand heb je geen sokken en schoenen aan. Op hoeveel verschillende manieren kun je daar luchtig gekleed vertoeven?

Opgave 17

Voor cilindersloten worden verschillende soorten sleutels gemaakt. De sleutel die je hier ziet bestaat uit zes gedeelten. Voor elk gedeelte wordt één van de patronen A, B of C gekozen.

Hoe groot is de kans dat een willekeurige sleutel voor zo'n slot ook echt past?




Figuur 13



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostaat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
