

1.2 Redeneren

Inleiding

Bij het werpen met een zuivere dobbelsteen weet je dat elk vlakje dezelfde kans heeft om boven te komen. Dat hoef je niet meer steeds experimenteel te bevestigen. Als je vooraf weet welke mogelijkheden even waarschijnlijk zijn kun je kansen berekenen door daarmee te redeneren.

Dan is het vooral een kwestie van alle even waarschijnlijke mogelijkheden in kaart te brengen. Op grond daarvan kun je dan een uitspraak doen over de kans op een bepaalde gebeurtenis.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- kansen bepalen op grond van redeneren met even waarschijnlijke mogelijkheden;
- alle mogelijkheden in kaart brengen.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen;
- werken met experimentele kansen en simulaties.

Verkennen

Opgave V1

Je werpt met twee dobbelstenen. Tel het aantal ogen dat boven komt.

Leg uit waarom de kans op het gooien van 3 ogen kleiner is dan op het gooien van 7 ogen.

Bepaal beide kansen door redeneren.

Uitleg

Stel je voor dat je met een zuivere dobbelsteen gooit en de kans wilt bepalen dat je na eenmaal werpen een 5 gooit. De volgende overwegingen zijn dan belangrijk:

- Het aantal mogelijke uitkomsten is zes, de dobbelsteen heeft immers zes zijkanten;
- Alle uitkomsten zijn even waarschijnlijk: de dobbelsteen is zuiver, dat wil zeggen dat elk vlakje dezelfde kans heeft boven te komen;
- De werper schudt en werpt correct: de steen wordt niet op een bepaald vlak neergelegd.



Figuur 2

Je kunt zo redeneren: de kans op het gooien van een 5 is even groot als de kans op het gooien van een 6 of de kans op een 4, een 3, een 2 of een 1. Het werpen is aselekt, er wordt vooraf geen vlak uitgekozen. Zo'n kans kun je aangeven met 'een op zes' of met $\frac{1}{6}$.

Opgave 1

Je gooit één keer met twee dobbelstenen.

- Hoe groot is de kans op het gooien van twee zessen?
- Bereken de kans op het gooien van een vijf en een zes.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als je (zonder experimenteren) weet dat uitkomsten even waarschijnlijk zijn, kun je kansen berekenen door te redeneren.

Deze kans heet **theoretische kans** en is gelijk aan:

$$\frac{\text{het aantal gunstige uitkomsten}}{\text{het aantal mogelijke uitkomsten}}$$

Het aantal gunstige uitkomsten is altijd kleiner dan of gelijk aan het totale aantal mogelijke uitkomsten. De theoretische kans is dus een breuk met een waarde tussen 0 en 1.

De kans (theoretisch of experimenteel) op een uitkomst 5 bij het gooien met een dobbelsteen noteer je zo: $P(X = 5) = \frac{1}{6}$. Spreek uit: de kans op het werpen van vijf ogen is een zesde.

- De hoofdletter P is de afkorting van het Engelse woord probability (van het Latijnse woord probabilitas). Dit betekent waarschijnlijkheid of kans.
- X is de kansvariabele die de 'waarde' kan hebben van alle mogelijke uitkomsten van het theoretische of praktische kansexperiment.
- $X = 5$ is de notatie voor een gebeurtenis, in dit geval de gebeurtenis waarbij na het werpen met de dobbelsteen, de vijf boven ligt.

Heb je te maken met bijvoorbeeld meerdere dobbelstenen (of munten, of andere dingen) dan moet je systematisch werken, zodat je geen mogelijkheid over het hoofd ziet. Tabellen en schema's kunnen daarbij helpen.

Stel dat je heel vaak met een dobbelsteen gooit. Volgens de **wet van de grote aantallen** benadert dan de experimentele kans op vijf ogen de theoretische kans op vijf ogen. De experimentele kans komt dus in de buurt van het getal $\frac{1}{6}$.

De wet van de grote aantallen legt het verband tussen experimentele en theoretische kansen. Als je een experiment maar vaak genoeg en op de juiste wijze herhaalt, nadert de relatieve frequentie van een bepaalde gebeurtenis de theoretische kans op die gebeurtenis.

Voorbeeld 1

Wat zijn de mogelijke kansen als je met één dobbelsteen werpt?

Hoe groot is de kans dat je meer dan vier ogen gooit?

Antwoord

Noem het aantal ogen op een vlak van de dobbelsteen X . Bij een zuivere dobbelsteen neem je aan dat elk vlakje een even grote kans heeft om boven te komen. Dus elk van de zes mogelijke aantallen ogen is even waarschijnlijk:

$$P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 4) = P(X = 5) = P(X = 6) = \frac{1}{6}.$$

Meer dan vier ogen gooi je als: $X = 5$ of $X = 6$.

Als gunstige uitkomsten heb je: vijf en zes ogen. Het aantal gunstige uitkomsten is twee.

Als mogelijke uitkomsten heb je 1, 2, 3, 4, 5 en 6 ogen. Het totaal aantal uitkomsten is zes.

De kans dat de uitkomst bij één worp meer dan vier ogen is, is twee op zes:

$$P(X = 5 \vee X = 6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Opgave 2

Noem X het aantal ogen dat bovenkomt bij een dobbelsteenworp.

- Bereken $P(X \leq 4)$.
- Bereken $P(X < 4)$.
- Bereken $P(X = \text{oneven})$
- Bereken de kans op minstens twee ogen.

Opgave 3

Je hebt een vaas met vier rode en zes witte balletjes. De vaas wordt goed geschud. Jan haalt één balletje uit de vaas zonder te kijken. Hij zegt dat hij een kans van $\frac{1}{2}$ heeft dat het een rood balletje is: er zijn immers twee kleuren, 'rood' en 'wit', en het balletje heeft één van die twee kleuren.

Waarom is die redenering fout? Hoe groot is de kans op een rode bal wel?

Voorbeeld 2

Wat zijn de mogelijke kansen als je met twee dobbelstenen werpt en je let op het totaal aantal ogen dat bovenkomt? Maak een overzicht.

Hoe groot is de kans dat je minstens 8 ogen gooit?



Figuur 3

Antwoord

Het aantal ogen dat in totaal boven kan komen, is 2, 3, 4, ..., 11, 12.

Dat zijn elf mogelijke uitkomsten. Die zijn echter niet even waarschijnlijk.

Bij iedere uitkomst voor de ene dobbelsteen zijn er immers zes mogelijkheden voor de andere; dat geeft in totaal 36 mogelijkheden. Neem X voor het aantal ogen op de ene dobbelsteen en Y voor het aantal ogen op de andere. In de figuur zie je alle 36 mogelijkheden voor $X + Y$, het totaal aantal ogen per worp.

Y \ X	X					
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figuur 4

Het aantal gunstige uitkomsten voor een totaal van bijvoorbeeld acht ogen is vijf.

De kans dat het totaal aantal ogen acht is, is $P(X + Y = 8) = \frac{5}{36}$.

De kans op meer dan acht ogen is: $P(X + Y > 8) = \frac{10}{36}$.

Opgave 4

Stel je voor dat je met twee dobbelstenen gooit en let op het aantal ogen dat bovenkomt. Het aantal ogen op de ene steen stel je voor door X , dat op de andere steen door Y . Dus $X + Y$ is het totaal aantal ogen dat bovenkomt.

- Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?
- Voor hoeveel mogelijkheden geldt: $P(X + Y = 5)$?
- Hoe groot is dus $P(X + Y = 5)$?
- Hoe groot is $P(X + Y = 7)$?
- Schrijf met behulp van de symbolen P , X en Y de kans op minstens negen ogen op. Hoe groot is die kans?

Voorbeeld 3

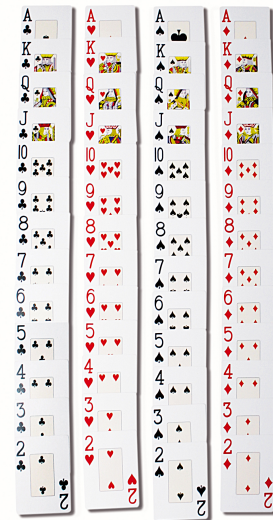
Ook bij het delen van speelkaarten spelen kansen een grote rol. Een normaal kaartspel telt 52 kaarten. Er zijn vier 'kleuren': harten, schoppen, ruiten, klaveren. Iedere kleur kent de kaarten 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, boer, vrouw, heer en aas. Als het delen van kaarten eerlijk gebeurt, is er sprake van een aselechte trekking.

Hoe groot is daarbij de kans dat je bij trekking van één kaart een aas krijgt? Hoe groot is de kans dat het harten aas is?

Antwoord

Er zijn vier azen in het spel. De kans op een aas is $P(\text{aas}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

De kans op harten aas is $P(\text{harten aas}) = \frac{1}{52}$.



Figuur 5

Opgave 5

Stel je voor dat je aselekt één kaart uit een goed geschud spel van 52 kaarten trekt.

- Welke kans heb je op een schoppen tien?
- Hoe groot is de kans op een plaatje?
- Hoe groot is de kans op een ruiten kaart?

Opgave 6

Welke van de volgende kansen kun je door redeneren bepalen? Bereken zo mogelijk de grootte van die kans, of geef aan hoe deze te bepalen is.

- De kans dat je in december minstens één keer te laat op school komt.
- De kans om een meerkeuzevraag met vier keuzemogelijkheden en één goed antwoord bij toeval goed te beantwoorden.
- De kans dat de eerstvolgende baby die wordt geboren, een jongen is.
- De kans dat de eerstvolgende baby die wordt geboren in een gezin met al drie jongens, weer een jongen is.
- De kans dat het morgen zes uur regent in Enschede.
- Je werpt met een dobbelsteen in de vorm van een regelmatig achthoek met vier rode, twee witte en twee blauwe zijvlakken. Wat is de kans dat bij het werpen met zo'n dobbelsteen, een rood zijvlak bovenkomt te liggen?

Verwerken

Opgave 7

Je trekt aselekt een kaart uit een kaartspel van 52 kaarten. Geef je antwoorden op onderstaande vragen als breuk.

- Hoe groot is de kans op een harten kaart?
- Hoe groot is de kans op een tien?
- Stel dat je een harten tien hebt getrokken, en je trekt daarna een tweede kaart uit het spel. Hoe groot is de kans op nog een tien?

Opgave 8

Je hebt een ondoorzichtige doos met daarin tien gekleurde balletjes, zeven groene en drie gele. De groene balletjes zijn genummerd 1 tot en met 7, de gele 1 tot en met 3. Je schudt die doos en haalt er zonder te kijken één balletje uit. Geef antwoorden op onderstaande vragen in een breuk.

- a Hoe groot is de kans dat het een geel balletje is?
- b Hoe groot is de kans dat het een balletje met nummer 1 is?
- c Hoe groot is de kans dat het balletje nummer 4 heeft?
- d Hoe groot is de kans dat het een groen balletje met een nummer hoger dan 3 is?

Opgave 9

Er wordt een loterij gehouden. De loten hebben nummers 000 tot en met 999. Alle loten zijn verkocht. Op volkomen aselechte wijze wordt een lotnummer getrokken. Daarop valt de tweede prijs. Geef de antwoorden op onderstaande vragen als breuk, indien van toepassing.

- a Jij hebt het nummer 113. Hoe groot is de kans dat je die prijs hebt?
- b Je vriendin zegt dat ze een even lotnummer heeft. Hoe groot is de kans dat zij de tweede prijs heeft?
- c Hoe groot is de kans dat er een even lotnummer wordt getrokken?
- d Waarom zijn de kansen bij b en c verschillend?

De tweede prijs is gevallen op lotnummer 771. Hierna wordt de eerste prijs getrokken, nummer 771 doet niet meer mee.

- e Hoe groot is nu jouw kans op de eerste prijs?
- f Hoe groot is nu de kans dat er een even lotnummer wordt getrokken?

Opgave 10

Je werpt met twee dobbelstenen en let op het aantal ogen dat bovenkomt. Geef je antwoorden op de onderstaande vragen in een breuk.

- a Hoe groot is de kans dat er zeven ogen boven komen te liggen?
- b Hoe groot is de kans op hoogstens zeven ogen?
- c Hoe groot is de kans op meer dan elf ogen?
- d Hoe groot is de kans op een even aantal ogen?

Opgave 11

Je werpt met drie geldstukken.

Bepaal de kans op precies twee keer kop. Geef je antwoord als breuk.

Opgave 12

Bij een voetbaltoernooi wordt aan het begin van elke wedstrijd getost met een munt om te bepalen welke ploeg mag aftrappen. Tijdens dit toernooi speelt Cambuur vier wedstrijden.

- a Hoe groot is de kans dat Cambuur bij de eerste wedstrijd de toss 'wint' en mag aftrappen?
- b Hoe groot is de kans dat Cambuur alle vier de wedstrijden mag aftrappen?
- c Hoe groot is de kans dat Cambuur minstens drie keer mag aftrappen?

Toepassen

Opgave 13: De familie Dollekamp

Voor een bevolkingsonderzoek worden willekeurige families uitgekozen die twee kinderen hebben van verschillende leeftijd, en waarvan ten minste één kind een jongen is. Familie Dollekamp doet mee met het onderzoek.

Hoe groot is de kans dat beide kinderen van meneer en mevrouw Dollekamp jongens zijn?

Opgave 14: Knippen met de ogen

Alle mensen knippen met hun ogen. Daardoor staan op groepsfoto's vaak enkele personen met gesloten ogen. Svenson en Barnes hebben onderzocht hoeveel foto's je moet maken van een groep van n personen om 99% kans te hebben op een foto waarop niemand zijn ogen dicht heeft. Zij hebben bij hun berekeningen de volgende aannames gedaan:

- Het knippen met de ogen gebeurt met onregelmatige tussenpozen.
- Mensen knippen gemiddeld tien keer per minuut met de ogen.
- Als iemand knippert, zijn de ogen gedurende 0,25 seconden dicht.

- a** Op een willekeurig moment wordt één foto genomen van één persoon. Op basis van de aannames van Svenson en Barnes kunnen we de kans berekenen dat deze persoon niet met gesloten ogen op de foto staat.

Bereken deze kans in vier decimalen nauwkeurig.

Ga er van uit dat de kans dat iemand met open ogen op de foto staat gelijk is aan 0,96. Bij een groepsfoto spreken we van een 'geslaagde' foto als alle personen op de foto hun ogen open hebben. Een fotograaf neemt één groepsfoto van een groep van 20 personen.

- b** Bereken de kans op een geslaagde groepsfoto.

Een fotograaf neemt 5 groepsfoto's van een groep van 25 personen.

De kans dat er minstens één geslaagde foto bij zit is ongeveer 0,89.

- c** Toon dat met een berekening aan.

Testen**Opgave 15**

Je trekt aselekt een kaart uit een volledig kaartspel (52 kaarten). Geef bij de onderstaande vragen je antwoorden als breuk.

- a** Hoe groot is de kans op een harten kaart?
- b** Hoe groot is de kans op een boer?
- c** Hoe groot is de kans op een harten boer?

Opgave 16

Bij roulette wordt een balletje aselekt in een draaiend rad geworpen. Dit rad bevat 37 even grote vakjes, volgens een bijzonder patroon genummerd van 0 tot en met 36. De vakjes zijn om en om rood en zwart gekleurd, behalve het vakje met 0, dat is groen. Elk fiche die je op het winnend nummer hebt gezet krijg je 36 keer uitbetaald. Je krijgt natuurlijk niet 37 keer uitbetaald, anders verdient het Casino niets. Geef bij de onderstaande vragen je antwoorden als breuk, indien van toepassing.

- a** Hoe groot is de kans op winst bij één keer spelen met één fiche?
- b** Verandert die kans als je twee fiches op hetzelfde nummer inzet? En als je twee fiches op verschillende nummers inzet?
- c** Hoe groot is de kans dat het balletje op een oneven getal komt te liggen?
- d** Hoe groot is de kans dat het balletje op een rood getal komt te liggen?
- e** Hoe groot is de kans dat het balletje op een rood getal komt te liggen wanneer al 26 keer achter elkaar een zwart getal is gedraaid?

Opgave 17

Je werpt met twee dobbelstenen. P is het product van het aantal ogen dat boven komt.

Bereken de kans dat P minstens 20 wordt. Geef je antwoord als breuk.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
